现代数学基础丛书 107

# 正规族理论及其应用

顾永兴 庞学诚 方明亮 著



科学出版社
www.sciencep.com

(O-2701.0101)




销售分类建议：高等数学

定 价：29.00 元

现代数学基础丛书 107

# 正规族理论及其应用

顾永兴 庞学诚 方明亮 著

科学出版社

北京

## 内 容 简 介

本书以亚纯函数值分布理论为基础，系统地介绍了近十多年来在亚纯函数正规族理论方面的研究成果，主要包括 Navanlinna 的两个基本定理，一些 Picard 型定理，一些正规定则，Zalcman 引理等.

本书适合高等院校数学系高年级大学生、研究生以及相关的教师及科研人员阅读参考.

**图书在版编目(CIP)数据**

正规族理论及其应用/顾永兴，庞学诚，方明亮著. —北京：科学出版社，2007

(现代数学基础丛书；107)

ISBN 978-7-03-018692-8

I. 正… II. ①顾… ②庞… ③方… III. 半纯函数-研究 IV. O174.52

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007) 第 032244 号

责任编辑：张 扬 / 责任校对：林青梅
责任印制：赵德静 / 封面设计：王 浩

科学出版社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

天时彩色印刷有限公司印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2007 年 4 月第 一 版 开本：B5（720 × 1000）
2007 年 4 月第一次印刷 印张：11 1/4
印数：1—4 000 字数：206 000

**定价：29.00 元**

（如有印装质量问题，我社负责调换〈双青〉）

# 《现代数学基础丛书》序

对于数学研究与培养青年数学人才而言，书籍与期刊起着特殊重要的作用．许多成就卓越的数学家在青年时代都曾钻研或参考过一些优秀书籍，从中汲取营养，获得教益．

20世纪70年代后期，我国的数学研究与数学书刊的出版由于文化大革命的浩劫已经破坏与中断了十余年，而在这期间国际上数学研究却在迅猛地发展着．1978年以后，我国青年学子重新获得了学习、钻研与深造的机会．当时他们的参考书籍大多还是50年代甚至更早期的著述．据此，科学出版社陆续推出了多套数学丛书，其中《纯粹数学与应用数学专著》丛书与《现代数学基础丛书》更为突出，前者出版约40卷，后者则逾80卷．它们质量甚高，影响颇大，对我国数学研究、交流与人才培养发挥了显著效用．

《现代数学基础丛书》的宗旨是面向大学数学专业的高年级学生、研究生以及青年学者，针对一些重要的数学领域与研究方向，作较系统的介绍．既注意该领域的基础知识，又反映其新发展，力求深入浅出，简明扼要，注重创新．

近年来，数学在各门科学、高新技术、经济、管理等方面取得了更加广泛与深入的应用，还形成了一些交叉学科．我们希望这套丛书的内容由基础数学拓展到应用数学、计算数学以及数学交叉学科的各个领域．

这套丛书得到了许多数学家长期的大力支持，编辑人员也为其付出了艰辛的劳动．它获得了广大读者的喜爱．我们诚挚地希望大家更加关心与支持它的发展，使它越办越好，为我国数学研究与教育水平的进一步提高作出贡献．

杨　乐

2003年8月

# 前　言

20 世纪初 P.Montel 引入了正规族概念, 他把具有某种列紧性的函数族称为正规族. 正规族理论的研究既有重要的理论意义, 也有重要的应用价值. 例如, 近年来十分活跃的复解析动力系统中的基本概念 Julia 集与 Fatou 集就是由正规性引出的. 自 P.Montel 引入正规族的概念到现在, 正规族理论有了长足的发展, 特别是在我国, 从熊庆来、庄圻泰到杨乐、张广厚等, 他们所作的奠基性工作使我国在正规族理论的研究方面处于国际前沿地位.

正规族理论的发展可分为三个阶段:

第一阶段即从 20 世纪 20 年代 Nevanlinna 值分布理论的产生到 20 世纪五六十年代. 正规族理论的核心就是正规定则的研究, P.Montel 首先把函数族的正规性与函数的取值问题联系了起来, 这就是经典的 Montel 正规定则. P.Montel 是用模函数证明的, 但使用这种超越的方法似乎难以更深入地研究正规族理论. Nevanlinna 值分布理论的产生不仅使函数族的正规性与函数导数的取值问题联系起来成为可能, 也使上述 Montel 正规定则的证明变得初等和简单. 在 20 世纪 30 年代, 应用 Nevanlinna 理论使正规族理论的研究达到了高峰, 涉及亚纯函数族情形出现了著名的 Marty 正规定则, 涉及全纯函数族情形相继出现了 Miranda、Valiron 以及庄圻泰正规定则. 在这个阶段, 人们对正规定则的研究主要集中在全纯函数族情形, 而对亚纯函数族情形除 Marty 定则外实质性的研究成果并不多.

第二阶段是从 20 世纪五六十年代到 80 年代. 1959 年, W.K.Hayman 建立的著名不等式启示人们提出如下问题: 一个亚纯函数族在 Miranda 定则的条件保持不变的情形下是否仍保持其正规性? 不久, W.K.Hayman 把它作为猜想正式提出. 1979 年, 我们证实了这个猜想. 需要指出的是: 我们的工作是以杨乐、张广厚于 20 世纪 60 年代在亚纯函数正规族理论研究方面所取得的开创性成果为基础的. 这段时期以 W.K.Hayman 所提出的几个猜想为主线获得了一系列新的正规定则, 其中大部分是我国数学工作者完成的. 到 20 世纪 80 年代中期, W.K.Hayman 所提出的猜想全部被证实, 这标志着正规族理论的研究达到了一个新的阶段.

在上述两个阶段中, 人们对正规定则的研究绝大部分采用的是 Miranda 的方法, 即消去原始值的方法, 它根据 Nevanlinna 值分布理论首先建立关于特征函数的界囿不等式, 再设法消去原始值. 而在消去原始值时, 往往由于需要高度的技巧而使某些正规定则的证明变得相当复杂.

第三个阶段应该追溯到以色列数学家 L.Zalcman 在 1975 年的一篇短小论文. 他在该文中另僻蹊径, 从 Marty 正规定则出发给出了一族亚纯函数不正规的充要条

件, 由此导出一个有趣的正规定则并应用它证明了一些正规定则. 然而他的这个结果没有能够被广泛和深入地应用, 一直到 20 世纪 80 年代末我国年轻的数学工作者创造性地改进了 L.Zalcman 的工作, 他们把 L.Zalcman 的结果与函数导数联系了起来. 这种方法使正规族理论的研究进入了一个新的天地, 它被称为 Zalcman-Pang 方法. 这种方法不仅使以往许多使用消去原始值的方法所得到的正规定则的证明变得相当简单, 而且又建立了一系列新的正规定则. 这段时期正规定则的研究主要围绕两方面的内容展开. 一方面是对上述 Hayman 猜想的深化, 这包括国内数学工作者的一些重要结果. 另一方面是 W.Schwick 在 20 世纪 90 年代初率先提出的把正规族和唯一性联系起来考虑, 这方面的成果主要是以色列和我国数学工作者所取得的.

本书主要介绍 20 世纪 90 年代以来即正规族理论发展的第三阶段的研究成果, 可以看作是《亚纯函数的正规族》一书的延续. 本书第 1 章介绍我们要用到的基础知识即亚纯函数 Nevanlinna 理论; 第 2 章介绍亚纯函数正规族理论的基本概念与性质; 第 3 章介绍 Bloch 原理和几个由 W.K.Hayman 提出的亚纯函数正规族问题, 其中主要介绍庞学诚和 L.Zalcman 等人获得的推广的 Zalcman 引理以及用 Zalcman 引理证明把 Miranda 正规定则推广到亚纯函数族情形的著名结果; 第 4 章介绍涉及例外函数的正规定则, 主要介绍杨乐获得的函数族中每个函数不取零值, 它的 $k$ 阶导数不取一不恒为零的全纯函数的正规定则以及庞学诚和 L.Zalcman 等人获得的改进形式: 函数族中每个函数的零点重数不小于 $k+2$, 它的 $k$ 阶导数不取一不恒为零的全纯函数的正规定则; 第 5 章介绍与分担值相关的正规定则, 主要介绍庞学诚和 L.Zalcman, 刘晓军和庞学诚获得的亚纯函数族中任意函数与其导函数分担两个有穷值及一个三元素集合的正规定则, 方明亮和 L.Zalcman 等人获得的几个与分担值相关的正规定则以及常建明和方明亮获得的全纯函数族中每个函数与它的一阶和二阶导数分担不动点的正规定则; 第 6 章介绍几个其他方面的正规定则, 主要介绍 M.Essén 和伍胜建、常建明和方明亮获得的涉及迭代与不动点的正规定则, 方明亮和袁文俊、J.D.Hinchliffe、W.Bergweiler 等人获得的涉及复合与例外函数的正规定则以及 W. Schwick、W.Bergweiler、W.Bergweiler 和 J.K.Langley 获得的涉及函数及它的 $k$ 阶导数不取零点的正规定则; 第 7 章介绍正规族的应用, 主要介绍 W.Schwick、W.Bergweiler、方明亮和 L.Zalcman 等人获得的正规族在复动力系统、复方程、整函数的唯一性以及亚纯函数模分布方面的应用; 第 8 章介绍关于拟正规的几个结果. 本书的第 3、8 章由庞学诚撰写, 第 4、5、6、7 章由方明亮撰写.

本书得到了杨乐院士和王跃飞教授的热情支持与帮助, 在此表示衷心的感谢.

顾永兴<br>2006 年 9 月

# 符号说明

$\mathbb{C}$ 表示复平面.

$\overline{\mathbb{C}}$ 表示扩充复平面.

$\Delta(z_0)$ 表示以 $z_0$ 为圆心的开圆, 也称为 $z_0$ 的邻域.

$\overline{\Delta}(z_0)$ 表示以 $z_0$ 为圆心的闭圆.

$\Delta(z_0, r)$ 表示以 $z_0$ 为圆心 $r$ 为半径的开圆, 也称为 $z_0$ 的邻域.

$\Delta'(z_0, r)$ 表示以 $z_0$ 为圆心 $r$ 为半径的去心开圆.

$\overline{\Delta}(z_0, r)$ 表示以 $z_0$ 为圆心 $r$ 为半径的闭圆.

$\overline{\Delta}'(z_0, r)$ 表示以 $z_0$ 为圆心 $r$ 为半径的去心闭圆.

# 目　录

# 第 1 章　亚纯函数值分布理论的基础知识

正规族理论以 R.Nevanlinna 所建立的亚纯函数值分布理论为基础. 本章扼要叙述 Nevanlinna 基本理论, 其中一部分内容将予以简略的论述, 对某些性质不加证明, 只指出可参阅的文献.

## 1.1　Poisson-Jensen 公式与特征函数

**定理 1.1.1**　设 $f(z)$ 为圆 $|z| < R(0 < R \leqslant \infty)$ 内的亚纯函数且不恒为零, 设 $f(z)$ 在 $|z| < \rho(0 < \rho < R)$ 内的零点为 $a_\lambda(\lambda = 1, 2, 3, \cdots, h)$, 极点为 $b_\mu(\mu = 1, 2, 3, \cdots, k)$, 其中每一零点或极点出现的次数与其级相同, 则当 $|z| < \rho$ 时有

$$\log|f(z)| = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log\left|f(\rho e^{i\varphi})\right|\operatorname{Re}\left(\frac{\rho e^{i\varphi}+z}{\rho e^{i\varphi}-z}\right)d\varphi + \sum_{\lambda=1}^{h}\log\left|\frac{\rho(z-a_\lambda)}{\rho^2-\overline{a_\lambda}z}\right| - \sum_{\mu=1}^{k}\log\left|\frac{\rho(z-b_\mu)}{\rho^2-\overline{b_\mu}z}\right|. \tag{1.1.1}$$

**证明**　我们区分两种情形.

**情形 1**　在圆周 $|z| = \rho$ 上 $f(z)$ 没有零点和极点. 置

$$F(z) = f(z)\cdot\frac{Q(z)}{P(z)}, \tag{1.1.2}$$

其中

$$P(z) = \prod_{\lambda=1}^{h}\frac{\rho(z-a_\lambda)}{\rho^2-\overline{a_\lambda}z}, Q(z) = \prod_{\mu=1}^{k}\frac{\rho(z-b_\mu)}{\rho^2-\overline{b_\mu}z}. \tag{1.1.3}$$

显然, $F(z)$ 在 $|z| < R$ 内亚纯而在圆 $|z| \leqslant \rho$ 上 $F(z) \neq 0, \infty$, 且当 $|z| = \rho$ 时,

$$|F(z)| = |f(z)|. \tag{1.1.4}$$

于是, $\log|F(z)|$ 在圆 $|z| \leqslant \rho$ 上调和, 根据 Poisson 公式, 当 $|z| < \rho$ 时,

$$\log|F(z)| = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log\left|F(\rho e^{i\varphi})\right|\operatorname{Re}\left(\frac{\rho e^{i\varphi}+z}{\rho e^{i\varphi}-z}\right)d\varphi. \tag{1.1.5}$$

由 (1.1.4), (1.1.2) 及 (1.1.5) 式, 即得 (1.1.1) 式.

**情形 2**　在圆周 $|z| = \rho$ 上 $f(z)$ 有零点或极点. 任取定点 $z : |z| < \rho$ 且 $z \neq a_\lambda, b_\mu$, 再任取 $r < \rho$, 使 $|z|$, $|a_\lambda|$ 及 $|b_\mu|$ 均小于 $r$. 根据情形 1, 有

$$\log|f(z)| = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log\left|f(re^{i\varphi})\right| \mathrm{Re}\left(\frac{re^{i\varphi}+z}{re^{i\varphi}-z}\right) d\varphi + \sum_{\lambda=1}^{h} \log\left|\frac{r(z-a_\lambda)}{r^2-\overline{a_\lambda}z}\right| - \sum_{\mu=1}^{k} \log\left|\frac{r(z-b_\mu)}{r^2-\overline{b_\mu}z}\right|. \tag{1.1.6}$$

另外, 从明显的不等式

$$\left|\log|te^{i\theta}-1|\right| < \log 2 + \log\frac{1}{|\theta|} \quad \left(0<\theta\leqslant\frac{\pi}{3}, 0<t\leqslant 1\right).$$

我们可知广义积分$\int_0^{2\pi}\log|f(\rho e^{i\varphi})|\mathrm{Re}\left(\frac{\rho e^{i\varphi}+z}{\rho e^{i\varphi}-z}\right)d\varphi$ 存在且

$$\lim_{r\to\rho}\int_0^{2\pi}\log|f(re^{i\varphi})|\mathrm{Re}\left(\frac{re^{i\varphi}+z}{re^{i\varphi}-z}\right)d\varphi = \int_0^{2\pi}\log|f(\rho e^{i\varphi})|\mathrm{Re}\left(\frac{\rho e^{i\varphi}+z}{\rho e^{i\varphi}-z}\right)d\varphi,$$

于是在 (1.1.6) 式中令 $r\to\rho$ 就得 (1.1.1) 式. 至此定理证毕. □

当 $f(0)\neq 0,\infty$ 时在 (1.1.1) 式中令 $z=0$ 就得

$$\log|f(0)| = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|f(\rho e^{i\varphi})|d\varphi - \sum_{\lambda=1}^{h}\log\frac{\rho}{|a_\lambda|} + \sum_{\mu=1}^{k}\log\frac{\rho}{|b_\mu|}. \tag{1.1.7}$$

(1.1.7) 式称为 Jensen 公式.

为了对 Jensen 公式进行变形, 我们引进一些记号.

**定义 1.1.1**

$$\log^+ x = \begin{cases} \log x, & x\geqslant 1, \\ 0, & 0\leqslant x<1. \end{cases}$$

我们称 $\log^+ x$ 为 $x$ 的正对数. 显然当 $x>0$ 时有 $\log x = \log^+ x - \log^+\frac{1}{x}$.

$n(r,f)$ 表示 $f(z)$ 在圆 $|z|\leqslant r$ 上的极点个数 (一个 $m$ 级极点算作 $m$ 个极点). 这样, $n\left(r,\frac{1}{f}\right)$ 就表示 $f(z)$ 在圆 $|z|<r$ 上的零点个数 (一个 $m$ 级零点算作 $m$ 个零点).

以下, 我们指出 (1.1.7) 式右边第三项

$$\sum_{\mu=1}^{k}\log\frac{\rho}{|b_\mu|} = \int_0^{\rho}\frac{n(t,f)}{t}dt.$$

事实上, 不妨设 $|z| < \rho$ 内的所有极点所位于的以原占为心的圆周的半径依次记为 $r_1 < r_2 < \cdots < r_l, m_1, m_2, \cdots, m_l$ 为相应的圆周上极点的个数 (计重数), 于是

$$\begin{aligned}
\sum_{\mu=1}^{k}\log\frac{\rho}{|b_\mu|} &= m_1\log\frac{\rho}{r_1}+\cdots+m_l\log\frac{\rho}{r_l}\\
&= m_1\int_{r_1}^{\rho}\frac{\mathrm{d}t}{t}+m_2\int_{r_2}^{\rho}\frac{\mathrm{d}t}{t}+\cdots+m_l\int_{r_l}^{\rho}\frac{\mathrm{d}t}{t}\\
&= m_1\int_{r_1}^{r_2}\frac{\mathrm{d}t}{t}+(m_1+m_2)\int_{r_2}^{\rho}\frac{\mathrm{d}t}{t}+m_3\int_{r_3}^{\rho}\frac{\mathrm{d}t}{t}+\cdots+m_l\int_{r_l}^{\rho}\frac{\mathrm{d}t}{t}\\
&= m_1\int_{r_1}^{r_2}\frac{\mathrm{d}t}{t}+(m_1+m_2)\int_{r_2}^{r_3}\frac{\mathrm{d}t}{t}+\cdots+(m_l+\cdots+m_l)\int_{r_l}^{\rho}\frac{\mathrm{d}t}{t}\\
&= \int_{r_1}^{r_2}\frac{n(t,f)}{t}\mathrm{d}t+\int_{r_2}^{r_3}\frac{n(t,f)}{t}\mathrm{d}t+\cdots+\int_{r_l}^{\rho}\frac{n(t,f)}{t}\mathrm{d}t\\
&= \int_{0}^{\rho}\frac{n(t,f)}{t}\mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

同理, (1.1.7) 式右边第二项

$$\sum_{\lambda=1}^{h}\log\frac{\rho}{|a_\lambda|}=\int_0^{\rho}\frac{n\left(t,\dfrac{1}{f}\right)}{t}\mathrm{d}t,$$

于是 (1.1.7) 式可改写成

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log^+|f(\rho\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi})|\,\mathrm{d}\varphi+\int_0^{\rho}\frac{n(t,f)}{t}\,\mathrm{d}t\\
&=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log^+\left|\frac{1}{f(\rho\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi})}\right|\mathrm{d}\varphi+\int_0^{\rho}\frac{n\left(t,\dfrac{1}{f}\right)}{t}\,\mathrm{d}t+\log|f(0)|.
\end{aligned}\tag{1.1.8}$$

在 (1.1.8) 式中我们假定了 $f(0)\neq 0,\infty$. 若在 $z=0$ 的某邻域内, 令 $f(z)=c_s z^s+c_{s+1}z^{s+1}+\cdots(c_s\neq 0)$, 应用 (1.1.8) 于 $g(z)=z^{-s}f(z)$ 即可得到 Jensen 公式的一般形式.

**定理 1.1.2**(Jensen 公式) 设 $f(z)$ 为圆 $|z|<R\,(0<R\leqslant\infty)$ 内的亚纯函数且不恒为零, 则当 $|z|<\rho\,(0<\rho<R)$ 时

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log^+|f(\rho\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi})|\,\mathrm{d}\varphi+\int_0^{\rho}\frac{n(t,f)-n(0,f)}{t}\,\mathrm{d}t+n(0,f)\log\rho\\
&=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log^+\left|\frac{1}{f(\rho\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi})}\right|\mathrm{d}\varphi+\int_0^{\rho}\frac{n\left(t,\dfrac{1}{f}\right)-n\left(0,\dfrac{1}{f}\right)}{t}\,\mathrm{d}t+n\left(0,\frac{1}{f}\right)\log\rho+\log|c_s|,
\end{aligned}\tag{1.1.9}$$

其中 $c_s$ 为 $f(z)$ 在 $z=0$ 的邻域内展开式的第一个不为零的系数.

Nevanlinna 理论可以说是从 Jensen 公式的一般形式 (1.1.9) 展开的. 以下再引进一些记号.

**定义 1.1.2**

$$m(r,f)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log^+|f(re^{i\varphi})|\,d\varphi,$$

$m(r,f)$ 也记为 $m(r,\infty)$, $m\left(r,\dfrac{1}{f-a}\right)$ 也记为 $m(r,a)$.

$$N(r,f)=\int_0^r\frac{n(t,f)-n(0,f)}{t}\,dt+n(0,f)\log r,$$

$N(r,f)$ 称为 $f(z)$ 的极点的密指量 (或计数函数), 记为 $N(r,\infty)$. $N\left(r,\dfrac{1}{f-a}\right)$ 称为 $f(z)$ 的 $a$ 值点密指量, 记为 $N(r,a)$.

这样, Jensen 公式 (1.1.9) 可写为

$$m(r,f)+N(r,f)=m\left(r,\frac{1}{f}\right)+N\left(r,\frac{1}{f}\right)+\log|c_s|. \tag{1.1.10}$$

有时还需用到如下形式:

$$\int_0^{2\pi}\log|f(re^{i\varphi})|\,d\varphi=N\left(r,\frac{1}{f}\right)-N(r,f)+\log|c_s|. \tag{1.1.11}$$

**定义 1.1.3**

$$T(r,f)=m(r,f)+N(r,f).$$

R. Nevanlinna 称 $T(r,f)$ 为亚纯函数 $f(z)$ 的特征函数.

于是 Jensen 公式又可写为

$$T(r,f)=T\left(r,\frac{1}{f}\right)+\log|c_s|. \tag{1.1.12}$$

特征函数 $T(r,f)$ 是 Nevanlinna 理论中最基本的概念, 我们给出如下性质但不加证明.

**定理 1.1.3**　设 $f(z)$ 在 $|z|<R$ 内亚纯, 则 $f(z)$ 的特征函数 $T(r,f)$ 为 $r\,(0<r<R)$ 的非减连续函数, 且为 $\log r$ 的凸函数.

该定理的证明见文献 [91], [207] 等.

另外, 根据正对数的性质, 容易推得关于特征函数的如下性质.

**定理 1.1.4**　设 $f_j(z)(j=1,\cdots,p)$ 为圆 $|z|<R(0<R\leqslant\infty)$ 内 $p$ 个亚纯函数, $f_j(0)\neq\infty(j=1,\cdots,p)$, 则

$$T(r,f_1f_2\cdots f_p)\leqslant\sum_{j=1}^{p}T(r,f_j)\qquad(0<r<R),\tag{1.1.13}$$

$$T(r,f_1+\cdots+f_p)\leqslant\sum_{j=1}^{p}T(r,f_j)+\log p\qquad(0<r<R).\tag{1.1.14}$$

**注** 在上述定理中若去掉 $f_j(0)\neq\infty$ 的限制, 则从 $N(r,f_j)$ 的意义可看出 (1.1.13) 与 (1.1.14) 式于 $1\leqslant r<R$ 也成立.

当 $f(z)$ 为全纯函数时, 利用定理 1.1.1(Poisson-Jensen 公式), 易推出其特征函数与其最大模 $M(r,f)=\max\limits_{|z|=r}|f(z)|$ 之间的相互制约关系.

**定理 1.1.5** 设 $f(z)$ 在 $|z|<R$ 内全纯, 则

$$T(r,f)\leqslant\log^+M(r,f)\leqslant\frac{\rho+r}{\rho-r}T(\rho,f)\qquad(0<r<\rho<R).\tag{1.1.15}$$

## 1.2 Nevanlinna 第一基本定理

根据正对数性质以及 Jensen 公式 (1.1.12) , 我们立即有

**定理 1.2.1**(Nevanlinna 第一基本定理) 设 $f(z)$ 为 $|z|<R(0<R\leqslant\infty)$ 内的一非常数亚纯函数. 若 $a$ 为任一有穷值, 则当 $0<r<R$ 时有

$$T\left(r,\frac{1}{f-a}\right)=T(r,f)+h(a,r),\tag{1.2.1}$$

其中

$$|h(a,r)|\leqslant\big|\log|c_s|\big|+\log^+|a|+\log 2,$$

$$f(z)-a=c_sz^s+c_{s+1}z^{s+1}+\cdots\quad(c_s\neq0).$$

由于一个非退化的分式线性变换可分解成线性变换与反演变换的复合, 故有如下推论.

**推论** 设 $f(z)$ 为 $|z|<R$ 内的一非常数亚纯函数, 又设 $F(z)=\dfrac{af(z)+b}{cf(z)+d}$, 其中 $a,b,c,d$ 为常数且 $ad-bc\neq0$, 则

$$T(r,F)=T(r,f)+O(1)\qquad(0<r<R).\tag{1.2.2}$$

下面我们再给出关于平面上亚纯函数的特征函数 $T(r,f)$ 的两个性质.

**定理 1.2.2** 设 $f(z)$ 为平面上的一非常数亚纯函数, 则

$$\lim_{r\to\infty}T(r,f)=\infty.\tag{1.2.3}$$

事实上当 $f(0)=\infty$ 时根据 $T(r,f)\geqslant N(r,f)$ 立即可证得. 当 $f(0)=a\neq\infty$ 时应用 Nevanlinna 第一基本定理 (定理 1.2.1) 于 $\dfrac{1}{f-a}$ 即可证得.

**定理 1.2.3** 设 $f(z)$ 为平面上一超越亚纯函数, 则

$$\lim_{r\to\infty}\frac{T(r,f)}{\log r}=\infty. \tag{1.2.4}$$

**证明** 区分三种情形.

**情形 1** $f(z)$ 没有极点. 这时 $f(z)$ 为超越整函数, 因此, 在展式

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n$$

中有无穷多个系数不为零, 根据 Cauchy 不等式, 有

$$|a_n|r^n\leqslant M(r,f)\quad(r>0,n=0,1,\cdots), \tag{1.2.5}$$

故对每个正整数 $p$, 有

$$\lim_{r\to\infty}\frac{M(r,f)}{r^p}=\infty,$$

从而

$$\lim_{r\to\infty}\frac{\log M(r,f)}{\log r}=\infty.$$

再在 (1.1.15) 式中取 $\rho=2r$, 得

$$\log^+M(r,f)\leqslant 3T(2r,f).$$

由此可得 (1.2.4) 式.

**情形 2** $f(z)$ 有无穷多个极点. 根据 $N(r,f)$ 的定义, 当 $r\geqslant 1$ 时, 有

$$N(r^2,f)\geqslant N(r^2,f)-N(r,f)\geqslant n(r,f)\log r,$$

因此

$$\lim_{r\to\infty}\frac{N(r,f)}{\log r}=\infty.$$

故也有 (1.2.4) 式.

**情形 3** $f(z)$ 有有穷多个极点 $b_j(j=1,2,\cdots,k)$, 它们出现的次数与其级相同. 置

$$P(z)=\prod_{j=1}^{k}(z-b_j),\quad g(z)=P(z)f(z).$$

显然 $g(z)$ 为整函数, 又因 $f(z)$ 为超越亚纯函数, 故 $g(z)$ 为超越整函数. 根据情形 1, 有

$$\lim_{r\to\infty}\frac{T(r,g)}{\log r}=+\infty.$$

另外, 由 (1.1.13) 式, 当 $r\geqslant 1$ 时,

$$T(r,g)\leqslant T(r,P)+T(r,f).$$

再注意对多项式 $P$ 有

$$T(r,P)=O(\log r)$$

就知 (1.2.4) 式成立. □

## 1.3 Ahlfors-Shimizu 特征函数及亚纯函数的级

这里, 我们再介绍另一种类型的特征函数, 分别由 L.Ahlfors[1] 和 T.Shimizu[172] 相互独立地引进，称为 Ahlfors-Shimizu 特征函数. 它与 Nevanlinna 特征函数仅相差一个有界量, 但由于它的几何特征而常被使用.

下面我们引进 Ahlfors-Shimizu 特征函数.

令

$$V(z) = \log\left(1 + |f(z)|^2\right).$$

其拉普拉斯算子为

$$\Delta V = \frac{4|f'(z)|^2}{\left(1 + |f(z)|^2\right)^2}. \tag{1.3.1}$$

现设 $f(z)$ 在 $|z| = r$ 上没有极点, 而在 $|z| < r$ 内的极点记为 $b_1, \cdots, b_h$, 相应的重数记为 $m_1, \cdots, m_h$. 取适当小的 $\delta > 0$, 使圆盘 $\overline{\Delta}(b_j, \delta)\ (j = 1, \cdots, h)$ 彼此不相交. 应用 Green 公式于区域

$$D_\delta = (|z| < r) \setminus \bigcup_{j=1}^{h} \overline{\Delta}(b_j, \delta)$$

得

$$\iint\limits_{D_\delta} \Delta V \mathrm{d}\delta_z = \oint\limits_{|z|=r} \frac{\partial V}{\partial n}\mathrm{d}s - \sum_{j=1}^{h} \oint\limits_{|z-b_j|=\delta} \frac{\partial V}{\partial n}\mathrm{d}s. \tag{1.3.2}$$

不难验证 (1.3.2) 式左边当 $\delta \to 0$ 时趋于

$$\iint\limits_{|z|<r} \frac{4\mid f'(z)\mid^2}{(1 + |f(z)|^2)^2}\mathrm{d}\delta_z.$$

而又由于在 $b_j$ 的充分小邻域内

$$V(z) = 2m_j \log\frac{1}{|z - b_j|} + V^*(z),$$

其中 $V^*(z)$ 在 $b_j$ 的邻域内有连续的偏导数，故 (1.3.2) 式右边当 $\delta \to 0$ 时趋于

$$\oint\limits_{|z|=r} \frac{\partial V}{\partial n}\mathrm{d}s + \sum_{j=1}^{h} 4\pi m_j = r\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\int_0^{2\pi} \log(1 + |f(z)|^2)\mathrm{d}\varphi + 4\pi n(r, f),$$

于是

$$\frac{1}{\pi}\iint\limits_{|z|<r} \frac{|f'(z)|^2}{\left(1 + |f(z)|^2\right)^2}\mathrm{d}\delta_z = \frac{r}{2\pi}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\int_0^{2\pi} \log\sqrt{1 + |f(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi})|^2}\mathrm{d}\varphi + n(r, f).$$

当 $f(0) \neq \infty$ 时, 上式两边除以 $r$ 并对 $r$ 积分得

$$\int_0^r \left\{\frac{1}{\pi}\iint\limits_{|z|<t} \frac{|f'(z)|^2}{\left(1+|f(z)|^2\right)^2}\mathrm{d}\delta_z\right\}\frac{\mathrm{d}t}{t}$$
$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log\sqrt{1+|f(re^{i\varphi})|^2}\mathrm{d}\varphi + N(r,f) - \log\sqrt{1+|f(0)|^2}. \tag{1.3.3}$$

若令

$$A(t) = \frac{1}{\pi}\iint\limits_{|z|<t}\frac{|f'(z)|^2}{\left(1+|f(z)|^2\right)^2}\mathrm{d}\delta_z,$$

再注意到

$$m(r,f) \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log\sqrt{1+|f(re^{i\varphi})|^2}\mathrm{d}\varphi \leqslant m(r,f) + \frac{1}{2}\log 2,$$

(1.3.3) 式就可以写为

$$\left|\int_0^r \frac{A(t)}{t}\mathrm{d}t - T(r,f)\right| \leqslant \frac{1}{2}\log 2 + \log\sqrt{1+|f(0)|^2}. \tag{1.3.4}$$

显然, 若在 $|z| = r$ 上有 $f(z)$ 的极点, 由连续性 (1.3.4) 式仍成立. 现在我们可以定义 Ahlfors-Shimizu 特征函数.

**定义 1.3.1**

$$T_0(r,f) = \int_0^r \frac{A(t)}{t}\mathrm{d}t$$

称为 $f(z)$ 的Ahlfors-Shimizu特征函数.

Ahlfors-Shimizu 特征函数 $T_0(r,f)$ 有如下性质.

**定理 1.3.1**　设 $f(z)$ 为圆 $|z| < R(0 < R \leqslant \infty)$ 内的非常数亚纯函数, 则 $f(z)$ 的Ahlfors-Shimizu特征函数 $T_0(r,f)$ 满足

(1) $T_0(r,f) = T_0\left(r,\dfrac{1}{f}\right)$,

(2) $|T_0(r,f) - T(r,f)| \leqslant \log 2 + |\log|c_s||$,

其中 $c_s$ 为 $f(z)$ 在 $z=0$ 的展式中的第一个不为零的系数.

**证明**　(1) 因

$$\frac{|f'(z)|}{1+|f(z)|^2} = \frac{\left|\left(\dfrac{1}{f(z)}\right)'\right|}{1+\left|\dfrac{1}{f(z)}\right|^2} \tag{1.3.5}$$

而成立.

(2) 若 $f(0) \neq \infty$, 则由 (1.3.4) 式有

$$|T_0(r,f) - T(r,f)| \leqslant \frac{1}{2}\log 2 + \log\sqrt{1 + |f(0)|^2}.$$

若 $f(0) = \infty$, 由性质 (1) 及 Jensen 公式 (1.1.12) 有

$$\begin{aligned} |T_0(r,f) - T(r,f)| &\leqslant \left|T_0\left(r, \frac{1}{f}\right) - T\left(r, \frac{1}{f}\right)\right| + \left|T\left(r, \frac{1}{f}\right) - T(r,f)\right| \\ &\leqslant \frac{1}{2}\log 2 + \big|\log|c_s|\big|. \end{aligned}$$

至此证得性质 (2) 成立. □

从 Ahlfors-Shimizu 特征函数的定义中我们可看到一个重要的量 $\dfrac{|f'(z)|}{1 + |f(z)|^2}$, 这个量被称为 $f(z)$ 的球面导数.

**定义 1.3.2** 设 $f(z)$ 在 $|z| < R(0 < R \leqslant \infty)$ 内亚纯, 我们称

$$f^{\#}(z) \triangleq \frac{|f'(z)|}{1 + |f(z)|^2}$$

为 $f(z)$ 的球面导数.

由(1.3.5)式,

$$f^{\#} = \left(\frac{1}{f}\right)^{\#}. \tag{1.3.6}$$

下面我们给出亚纯函数的级的定义.

**定义 1.3.3** 设 $f(z)$ 为平面上的亚纯函数,$f(z)$ 的级 $\lambda$ 定义为

$$\lambda = \overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\log^+ T(r,f)}{\log r}.$$

本书今后还需要下面两个性质:

**定理 1.3.2** 设 $f(z)$ 为平面上的亚纯函数. 若 $f(z)$ 的球面导数 $f^{\#}(z)$ 有界, 则 $f(z)$ 的级至多为2.

事实上, 根据 $T_0(r,f)$ 的定义以及定理 1.3.1 立即可推得.

**定理 1.3.3** 设 $f(z)$ 为整函数. 若 $f(z)$ 的球面导数 $f^{\#}(z)$ 有界, 则 $f(z)$ 的级至多为 1.

该定理的证明请参考文献 [60].

## 1.4 Nevanlinna 第二基本定理

在给出第二基本定理之前先证一个引理, 这个引理本身也是比较有用的.

**引理 1.4.1**　设 $f_1(z),f_2(z)$ 在 $|z|<R(0<R\leqslant\infty)$ 内亚纯且不恒为零, 则当 $0<r<R$ 时

$$N(r,f_1f_2)-N\left(r,\frac{1}{f_1f_2}\right)=N(r,f_1)+N(r,f_2)-N\left(r,\frac{1}{f_1}\right)-N\left(r,\frac{1}{f_2}\right).\tag{1.4.1}$$

这个引理只需利用 Jensen 公式 (1.1.11) 立即就可证得.

我们从恒等式 $\dfrac{1}{f}\equiv 1-\dfrac{f'}{f}\cdot\dfrac{f-1}{f'}$ 出发, 并应用 Jensen 公式及引理 1.4.1, 即可获得第二基本定理的一种特殊形式.

**定理 1.4.1**　设 $f(z)$ 为 $|z|<R(0<R\leqslant\infty)$ 内非常数亚纯函数且 $f(0)\neq 0,1,\infty$ 及 $f'(0)\neq 0$, 则当 $0<r<R$ 时

$$T(r,f)\leqslant N(r,f)+N\left(r,\frac{1}{f}\right)+N\left(r,\frac{1}{f-1}\right)-N_1(r)+S(r,f),\tag{1.4.2}$$

其中

$$N_1(r)=2N(r,f)-N(r,f')+N\left(r,\frac{1}{f'}\right),$$

$$S(r,f)=m\left(r,\frac{f'}{f}\right)+m\left(r,\frac{f'}{f-1}\right)+\log\left|\frac{f(0)\,(f(0)-1)}{f'(0)}\right|+\log 2.$$

在给出 Nevanlinna 第二基本定理的一般形式时我们需证明一个引理.

**引理 1.4.2**　设 $f(z)$ 为 $|z|<R(0<R\leqslant\infty)$ 内非常数亚纯函数. 又设 $a_j(j=1,2,\cdots,q)$ 为 $q(\geqslant 2)$ 个互相判别的有穷复数. 若 $f(0)\neq 0,\infty$ 及 $f'(0)\neq 0$, 则当 $0<r<R$ 时, 有

$$m(r,f)+\sum_{j=1}^{q}m\left(r,\frac{1}{f-a_j}\right)\leqslant 2T(r,f)-N_1(r)+S(r,f),\tag{1.4.3}$$

其中

$$N_1(r)=2N(r,f)-N(r,f')+N\left(r,\frac{1}{f'}\right),$$

$$S(r,f)=m\left(r,\frac{f'}{f}\right)+m\left(r,\sum_{j=1}^{q}\frac{f'}{f-a_j}\right)+q\log^+\frac{2q}{\delta}+\log 2+\log\frac{1}{|f'(0)|},$$

$$\delta=\min_{1\leqslant i<j\leqslant q}|a_i-a_j|.$$

**证明**　置

$$F(z)=\sum_{j=1}^{q}\frac{1}{f(z)-a_j}.$$

我们先证

$$m(r,F) \geqslant \sum_{j=1}^{q} m\left(r, \frac{1}{f-a_j}\right) - q\log^+ \frac{2q}{\delta} - \log 2. \tag{1.4.4}$$

任意固定值 $r$, 置

$$E_\nu = \left\{\theta : \left|f(re^{i\theta}) - a_\nu\right| < \frac{\delta}{2q}, 0 \leqslant \theta < 2\pi\right\},$$

$$E = \bigcup_{\nu=1}^{q} E_\nu.$$

设 $\theta \in E$, 不妨设 $\theta \in E_\nu$. 于是, 当 $j \neq \nu$ 时,

$$\left|f(re^{i\theta}) - a_j\right| \geqslant |a_j - a_\nu| - \left|f(re^{i\theta}) - a_\nu\right| \geqslant \delta\left(1 - \frac{1}{2q}\right).$$

从而由

$$F(re^{i\theta}) = \frac{1}{f(re^{i\theta}) - a_\nu}\left[1 + \sum_{j\neq\nu} \frac{f(re^{i\theta}) - a_\nu}{f(re^{i\theta}) - a_j}\right]$$

可得

$$\left|F(re^{i\theta})\right| > \frac{1}{\left|f(re^{i\theta}) - a_\nu\right|}\left[1 - (q-1)\frac{\dfrac{\delta}{2q}}{\delta\left(1 - \dfrac{1}{2q}\right)}\right] > \frac{1}{2\left|f(re^{i\theta}) - a_\nu\right|}.$$

注意到 $E_j \cap E_\nu$ 为空集 $(j \neq \nu)$, 因而有

$$\begin{aligned}\log^+\left|F(re^{i\theta})\right| &> \log^+ \frac{1}{\left|f(re^{i\theta}) - a_\nu\right|} - \log 2 \\ &\geqslant \sum_{j=1}^{q} \log^+ \frac{1}{\left|f(re^{i\theta}) - a_j\right|} - q\log^+ \frac{2q}{\delta} - \log 2.\end{aligned} \tag{1.4.5}$$

显然, 当 $\theta \notin E$ 时, (1.4.5) 式仍成立. 因此 (1.4.4) 成立.

我们再求 $m(r,F)$ 的一个上界.

$$\begin{aligned}m(r,F) &\leqslant m(r, f'F) + m\left(r, \frac{1}{f'}\right) \\ &= m(r, f'F) + T(r, f') - N\left(r, \frac{1}{f'}\right) + \log \frac{1}{|f'(0)|}.\end{aligned} \tag{1.4.6}$$

而

$$\begin{aligned}T(r,f')&=m(r,f')+N(r,f')\\&\leqslant m(r,f)+m\left(r,\frac{f'}{f}\right)+N(r,f')\\&=T(r,f)+m\left(r,\frac{f'}{f}\right)+N(r,f')-N(r,f).\end{aligned}\tag{1.4.7}$$

由 (1.4.4), (1.4.6), 及 (1.4.7) 式, 即得 (1.4.3). □

利用 (1.4.3) 式及 Jensen 公式, 就可得第二基本定理的一般形式.

**定理 1.4.2**(Nevanlinna 第二基本定理) 设 $f(z)$ 为 $|z|<R(0<R\leqslant\infty)$ 内非常数亚纯函数. 又设 $a_j(j=1,2,\cdots,q)$ 为 $q(\geqslant 3)$ 个互相判别的复数 (有穷或无穷). 若 $f(0)\neq 0,\infty,a_j(j=1,2,\cdots,q)$ 及 $f'(0)\neq 0$, 则

$$(q-2)T(r,f)\leqslant\sum_{j=1}^{q}N\left(r,\frac{1}{f-a_j}\right)-N_1(r)+S(r,f),\tag{1.4.8}$$

其中$S(r,f)$ 与 (1.4.3)式中的 $S(r,f)$ 基本相同, 而

$$N_1(r)=2N(r,f)-N(r,f')+N\left(r,\frac{1}{f'}\right).$$

**注** (1.4.2), (1.4.3) 及 (1.4.8) 式中出现的项 $S(r,f)$ 称为余项. 另外, 在上述几个定理中若去掉函数 $f(z)$ 在 $z=0$ 的限制, 结论仍然成立, 只需适当改变余项 $S(r,f)$ 中的常数部分.

## 1.5 对数导数

为了应用第二基本定理, 需对 $S(r,f)$ 的增长性进行估计. 我们将指出, 对于平面情形的亚纯函数, 当 $r\to\infty$ 时,$S(r,f)$ 为 $T(r,f)$ 的无穷小量. 我们还注意到, 对余项 $S(r,f)$ 增长性的估计取决于对对数导数平均值 $m\left(r,\frac{f^{(k)}}{f}\right)$ 的增长性的估计. 下面给出关于对数导数平均值 $m\left(r,\frac{f^{(k)}}{f}\right)$ 的基本引理. 对于 $k=1$ 的情形, 本质上是由 R.Nevanlinna 给出的, 后来 G.Valiron 给出了较为精确的形式. 对于 $k$ 的一般情形, 是由熊庆来给出的. 以下我们介绍由 W.Ngoan 和 W.Ostrowski 给出的另一种形式的估计, 这部分内容取自文献 [99].

**定理 1.5.1**(对数导数基本引理) 设 $f(z)$ 为 $|z|<R(0<R\leqslant\infty)$ 内的非常数亚纯函数,$f(0)=1$, 则当 $0<r<\rho<R$ 及 $0<\alpha<1$ 时有

$$m\left(r,\frac{f'}{f}\right)\leqslant\frac{1}{\alpha}\log\left[1+\frac{24}{1-\alpha}\left(\frac{\rho}{\rho-r}\right)^{1+\alpha}\frac{\max(T(\rho,f),1)}{r^{\alpha}}\right].\tag{1.5.1}$$

为了证明该定理, 先证一个引理.

**引理 1.5.1** 以下两个不等式成立:

(1)

$$\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)^{\alpha} \leqslant \sum_{k=1}^{n} {x_k}^{\alpha},$$

其中 $x_k \geqslant 0(k=1,\cdots,n)$, $0<\alpha<1$.

(2)

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b \log\varphi(x)\mathrm{d}x \leqslant \log\left[\frac{1}{b-a}\int_a^b \varphi(x)\mathrm{d}x\right],$$

其中 $\varphi(x)$ 为 $[a,b]$ 上的正值连续函数.

**证明** (1) 我们只需考虑 $x_k(k=1,\cdots,n)$ 不全为零的情形. 此时

$$1=\sum_{k=1}^{n}\frac{x_k}{\sum\limits_{k=1}^{n}x_k} \leqslant \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{x_k}{\sum\limits_{k=1}^{n}x_k}\right)^{\alpha},$$

由此立即证得 (1).

(2) 不失一般性, 令 $a=0$, $b=1$, 由几何平均值不超过算数平均值得

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\log\varphi\left(\frac{k}{n}\right)=\log\sqrt[n]{\varphi\left(\frac{1}{n}\right)\cdots\varphi\left(\frac{n}{n}\right)} \leqslant \log\frac{\varphi\left(\frac{1}{n}\right)+\cdots+\varphi\left(\frac{n}{n}\right)}{n},$$

在上式两边令 $n\to\infty$ 即证得 (2). □

现在我们来证明定理 1.5.1.

**证明** 先取某一圆域 $d\subset(|z|<\rho)$ 使 $f(z)$ 在 $d$ 内没有零点与极点. 应用 Poisson-Jensen 公式 (1.1.1), 在 $d$ 内存在单值的解析分支 $\log f(z)$, 使得在 $d$ 内有

$$\log f(z)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log\left|f(\rho\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi})\right|\frac{\rho\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}+z}{\rho\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}-z}\mathrm{d}\varphi+\sum_{\lambda=1}^{h}\log\frac{\rho(z-a_\lambda)}{\rho^2-\overline{a_\lambda}z}$$
$$-\sum_{\mu=1}^{k}\log\frac{\rho(z-b_\mu)}{\rho^2-\overline{b_\mu}z}+\mathrm{i}C.$$

再对上式求导并由唯一性, 可知当 $|z|<\rho$ 时

$$\frac{f'(z)}{f(z)}=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log\left|f(\rho\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi})\right|\frac{2\rho\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}}{(\rho\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}-z)^2}\mathrm{d}\varphi+\sum_{\lambda=1}^{h}\left(\frac{1}{z-a_\lambda}+\frac{\overline{a_\lambda}}{\rho^2-\overline{a_\lambda}z}\right)$$
$$-\sum_{\mu=1}^{k}\left(\frac{1}{z-b_\mu}+\frac{\overline{b_\mu}}{\rho^2-\overline{b_\mu}z}\right),$$

于是

$$\begin{aligned}\left|\frac{f'(z)}{f(z)}\right| \leqslant & \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|\log|f(\rho e^{i\varphi})||\frac{2\rho}{(\rho-r)^2}d\varphi+\sum_{\lambda=1}^{h}\left|\frac{1}{z-a_\lambda}+\frac{\overline{a_\lambda}}{\rho^2-\overline{a_\lambda}z}\right| \\ & +\sum_{\mu=1}^{k}\left|\frac{1}{z-b_\mu}+\frac{\overline{b_\mu}}{\rho^2-\overline{b_\mu}z}\right| \\ = & \frac{2\rho}{(\rho-r)^2}\left[m(\rho,f)+m\left(\rho,\frac{1}{f}\right)\right]+\sum_{\lambda=1}^{h}\left|\frac{1}{z-a_\lambda}\left(1+\frac{\overline{a_\lambda}}{\rho}\frac{\rho(z-a_\lambda)}{\rho^2-\overline{a_\lambda}z}\right)\right| \\ & +\sum_{\mu=1}^{k}\left|\frac{1}{z-b_\mu}\left(1+\frac{\overline{b_\mu}}{\rho}\frac{\rho(z-b_\mu)}{\rho^2-\overline{b_\mu}z}\right)\right| \\ \leqslant & \frac{2\rho}{(\rho-r)^2}\left[m(\rho,f)+m\left(\rho,\frac{1}{f}\right)\right]+\sum_{\lambda=1}^{h}\frac{2}{|z-a_\lambda|}+\sum_{\mu=1}^{k}\frac{2}{|z-b_\mu|},\end{aligned}$$

应用 Jensen 公式并注意到 $f(0)=1$ 则有

$$\left|\frac{f'(z)}{f(z)}\right| \leqslant \frac{4\rho}{(\rho-r)^2}T(\rho,f)+\sum_{\lambda=1}^{h}\frac{2}{|z-a_\lambda|}+\sum_{\mu=1}^{k}\frac{2}{|z-b_\mu|}.$$

根据引理 1.5.1 的性质 (1),

$$\begin{aligned}\log^+\left|\frac{f'(z)}{f(z)}\right| \leqslant & \frac{1}{\alpha}\log\left(1+\left|\frac{f'(z)}{f(z)}\right|\right)^\alpha \\ \leqslant & \frac{1}{\alpha}\log\left[1+\frac{4\rho}{(\rho-r)^2}T(\rho,f)+\sum_{\lambda=1}^{h}\frac{2}{|z-a_\lambda|}+\sum_{\mu=1}^{k}\frac{2}{|z-b_\mu|}\right]^\alpha \\ \leqslant & \frac{1}{\alpha}\log\left[1+4\frac{(\rho T(\rho,f))^\alpha}{(\rho-r)^{2\alpha}}+\sum_{\lambda=1}^{h}\frac{2}{|z-a_\lambda|^\alpha}+\sum_{\mu=1}^{k}\frac{2}{|z-b_\mu|^\alpha}\right].\end{aligned}$$

又根据引理 1.5.1 的性质 (2) 有

$$\begin{aligned}m\left(r,\frac{f'}{f}\right) \leqslant & \frac{1}{\alpha}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log\left(1+\frac{4(\rho T(\rho,f))^\alpha}{(\rho-r)^{2\alpha}}+\sum_{\lambda=1}^{h}\frac{2}{|re^{i\varphi}-a_\lambda|^\alpha}\right. \\ & \left.+\sum_{\mu=1}^{k}\frac{2}{|re^{i\varphi}-b_u|^\alpha}\right)d\varphi \\ \leqslant & \frac{1}{\alpha}\log\left(1+\frac{4(\rho T(\rho,f))^\alpha}{(\rho-r)^{2\alpha}}+\sum_{\lambda=1}^{h}\frac{2}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{d\varphi}{|re^{i\varphi}-a_\lambda|^\alpha}\right.\end{aligned}$$

$$+\sum_{\mu=1}^{k}\frac{2}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{d}\varphi}{|re^{i\varphi}-b_\mu|^\alpha}\Bigg).$$

下面估计积分

$$\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{d}\varphi}{|re^{i\varphi}-a_\lambda|^\alpha}.$$

令 $a_\lambda=ae^{i\theta}(a>0)$, 则

$$\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{d}\varphi}{|re^{i\varphi}-a_\lambda|^\alpha}=\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{d}\varphi}{|re^{i(\varphi-\theta)}-a|^\alpha}\leqslant 4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}\varphi}{|re^{i\varphi}-a|^\alpha}$$
$$\leqslant\frac{4}{r^\alpha}\left(\frac{\pi}{2}\right)^\alpha\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}\varphi}{\varphi^\alpha}=\frac{2\pi}{(1-\alpha)r^\alpha}.$$

故

$$\sum_{\lambda=1}^{h}\frac{2}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{d}\varphi}{|re^{i\varphi}-a_\lambda|^\alpha}\leqslant\frac{2n\left(\rho,\dfrac{1}{f}\right)}{(1-\alpha)r^\alpha},$$

同理

$$\sum_{\mu=1}^{k}\frac{2}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{d}\varphi}{|re^{i\varphi}-b_\mu|^\alpha}\leqslant\frac{2n(\rho,f)}{(1-\alpha)r^\alpha}.$$

于是

$$m\left(r,\frac{f'}{f}\right)\leqslant\frac{1}{\alpha}\log\left[1+\frac{4(\rho T(\rho,f))^\alpha}{(\rho-r)^{2\alpha}}+\frac{2\left(n\left(\rho,\dfrac{1}{f}\right)+n(\rho,f)\right)}{(1-\alpha)r^\alpha}\right].$$

令 $\rho'=\dfrac{r+\rho}{2}$, 并在上式中用 $\rho'$ 替代 $\rho$, 显然不等式仍成立, 即

$$m\left(r,\frac{f'}{f}\right)\leqslant\frac{1}{\alpha}\log\left[1+\frac{4(\rho' T(\rho',f))^\alpha}{(\rho'-r)^{2\alpha}}\right]+\frac{2\left(n\left(\rho',\dfrac{1}{f}\right)+n(\rho',f)\right)}{(1-\alpha)r^\alpha}.$$

再顾及

$$N(\rho,\frac{1}{f})+N(\rho,f)\geqslant\int_{\rho'}^{\rho}\frac{n\left(t,\dfrac{1}{f}\right)+n(t,f)}{t}\mathrm{d}t$$
$$\geqslant\left(n\left(\rho',\frac{1}{f}\right)+n(\rho',f)\right)\log\frac{\rho}{\rho'}$$

$$\geqslant \left(n\left(\rho', \frac{1}{f}\right) + n(\rho', f)\right) \frac{\rho - \rho'}{\rho}$$

$$= \left(n\left(\rho', \frac{1}{f}\right) + n(\rho', f)\right) \frac{\rho - r}{2\rho},$$

也就有

$$n\left(\rho', \frac{1}{f}\right) + n(\rho', f) \leqslant \frac{4\rho}{\rho - r} T(\rho, f).$$

故

$$\begin{aligned} m\left(r, \frac{f'}{f}\right) &\leqslant \frac{1}{\alpha}\log\left[1 + \frac{16(\rho T(\rho, f))^{\alpha}}{(\rho - r)^{2\alpha}} + \frac{8\rho}{\rho - r}\frac{T(\rho, f)}{(1-\alpha)r^{\alpha}}\right] \\ &\leqslant \frac{1}{\alpha}\log\left[1 + \frac{\max(T(\rho, f), 1)}{(1-\alpha)r^{\alpha}}\left(\frac{8\rho}{\rho - r} + \frac{16\rho^{\alpha}r^{\alpha}}{(\rho - r)^{2\alpha}}\right)\right] \\ &\leqslant \frac{1}{\alpha}\log\left[1 + \frac{24}{1-\alpha}\left(\frac{\rho}{\rho - r}\right)^{1+\alpha}\frac{\max(T(\rho, f), 1)}{r^{\alpha}}\right]. \end{aligned}$$

至此定理证毕. □

**推论 1** 设 $f(z)$ 在 $|z| < R$ 内亚纯且 $f(0) \neq 0, \infty$, 则当 $0 < r < \rho < R$ 时

$$m\left(r, \frac{f'}{f}\right) < 2\log^{+}T(\rho, f) + 3\log\frac{\rho}{\rho - r} + \log^{+}\frac{1}{r} + 2\log^{+}\log^{+}\frac{1}{|f(0)|} + 1. \tag{1.5.2}$$

只需令 $g(z) = \dfrac{f(z)}{f(0)}$, 再顾及 $\dfrac{g'(z)}{g(z)} = \dfrac{f'(z)}{f(z)}$, 并应用 (1.5.1) 式于 $g$, 其中取 $\alpha = \dfrac{1}{2}$, 即可得此推论.

**推论 2** 设 $f(z)$ 在 $|z| < R$ 内亚纯且 $f(0) \neq 0, \infty$, 则当 $0 < r < \rho < R$ 时

$$m\left(r, \frac{f^{(k)}}{f}\right) < K\left[\log^{+}T(\rho, f) + \log^{+}\frac{\rho}{\rho - r} + \log^{+}\frac{1}{r} + \log^{+}\log^{+}\frac{1}{|f(0)|} + 1\right], \tag{1.5.3}$$

其中 $K$ 为仅依赖于 $k$ 的常数.

从推论 1 出发, 对 $k$ 用归纳法即可证得此推论. 详细证明见文献 [207], [91]

**注** 在推论 1 与推论 2 中, 如果去掉限制 $f(0) \neq 0, \infty$, 那么, 若在 $z = 0$ 的某领域内, $f(z) = c_s z^s + c_{s+1}z^{s+1} + \cdots (c_s \neq 0)$, 则可令 $g(z) = z^{-s}f(z)$, 应用这些推论于 $g$, 仍可得 (1.5.2) 及 (1.5.3) , 其中原始值 $\log^{+}\log^{+}\dfrac{1}{|f(0)|}$ 换为 $\log^{+}\log^{+}\dfrac{1}{|c_s|}$.

**推论 3** 设 $f(z)$ 为平面上的有穷级亚纯函数, 其级为 $\rho$, 则

$$\varlimsup_{r\to\infty} \frac{m\left(r, \frac{f'}{f}\right)}{\log r} \leqslant \max\{\rho - 1, 0\}. \tag{1.5.4}$$

**证明** 先设 $f(0)=1$. 在 (1.5.1) 式中取 $\rho=2r$, 任给 $\varepsilon>0$, 对充分大的 $r$ 有

$$m\left(r,\frac{f'}{f}\right)\leqslant\frac{1}{\alpha}\log\left(1+\frac{24}{1-\alpha}2^{1+\alpha}\frac{(2r)^{\rho+\varepsilon}}{r^{\alpha}}\right).$$

若 $\rho<1$, 可取 $\varepsilon>0$ 及 $0<\alpha<1$ 满足 $\rho+\varepsilon<\alpha<1$, 于是

$$m\left(r,\frac{f'}{f}\right)\leqslant\frac{1}{\alpha}\log\left(1+\frac{24}{1-\alpha}2^{1+\alpha+\rho+\varepsilon}r^{\rho+\varepsilon-\alpha}\right),$$

故

$$\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{m\left(r,\frac{f'}{f}\right)}{\log r}=0.$$

若 $\rho\geqslant1$, 则当 $r$ 充分大时

$$\begin{aligned}m\left(r,\frac{f'}{f}\right)&\leqslant\frac{1}{\alpha}\log\left[r^{\rho+\varepsilon-\alpha}\left(r^{-(\rho+\varepsilon-\alpha)}+\frac{24}{1-\alpha}2^{1+\alpha+\rho+\varepsilon}\right)\right]\\&=\frac{\rho+\varepsilon-\alpha}{\alpha}\log r+O(1),\end{aligned}$$

故

$$\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{m\left(r,\frac{f'}{f}\right)}{\log r}\leqslant\frac{\rho+\varepsilon-\alpha}{\alpha},$$

再令 $\varepsilon\to0,\alpha\to1$, 即可证得此推论. □

若 $f(0)\neq1$, 设 $f(z)=c_sz^s+c_{s+1}z^{s+1}+\cdots,(c_s\neq0)$, 再令 $g(z)=(c_sz^s)^{-1}f(z)$, 则当 $r$ 充分大时, $\left|m\left(r,\frac{g'}{g}\right)-m\left(r,\frac{f'}{f}\right)\right|\leqslant2$. 于是推论 3 的结论仍成立.

现在我们来估计余项 $S(r,f)$. 这里还需要一个重要引理, 是由 E.Borel 给出的.

**引理 1.5.2**(Borel 引理) 设 $T(r)$ 为 $[r_0,\infty)$ 上的连续非减函数, 且 $T(r_0)\geqslant1$, 则除去 $r$ 的一个集合 $E_0$ 外有

$$T\left(r+\frac{1}{T(r)}\right)<2T(r),$$

其中 $E_0$ 的线性测度不超过2.

该引理的证明可见文献 [207].

下面是对余项 $S(r,f)$ 的估计.

**定理 1.5.2** 设 $f(z)$ 为平面上的非常数亚纯函数,$S(r,f)$ 为第二基本定理中出现的余项, 则当 $f(z)$ 为有穷级时, $S(r,f)=O(\log r)$; 当 $f(z)$ 为无穷级时, $S(r,f)=O(\log(rT(r,f)))$, 此时可能需除去 $r$ 的一个仅依赖于 $f(z)$ 的线性测度有限之集.

应用定理 1.5.1 之推论 1 及引理 1.5.1, 立即就可证得此定理.

**推论 4**　设 $f(z)$ 为平面上的非常数亚纯函数,$S(r,f)$ 为第二基本定理中出现的余项, 当 $r\to\infty$ 时, 若 $f(z)$ 为有穷级, 则 $S(r,f)=o(T(r,f))$; 若 $f(z)$ 为无穷级时, 则 $S(r,f)=o(T(r,f))$, 此时可能需除去 $r$ 的一个线性测度有限之集.

## 1.6　亚纯函数涉及导数的模分布

Nevanlinna 第二基本定理研究特征函数被函数取值的幂指量所界囿, 而在亚纯函数结合其导数的值分布方面, 首先由 H.Milloux 获得下面的结果.

**定理 1.6.1**(Milloux 不等式)　设 $f(z)$ 为 $|z|<R(0<R\leqslant\infty)$ 内非多项式的亚纯函数. 若 $f(0)\neq 0,\infty,f^{(k)}(0)\neq 1$, $f^{(k+1)}(0)\neq 0$, 则当 $0<r<R$ 时有

$$T(r,f)<\overline{N}(r,f)+N\left(r,\frac{1}{f}\right)+N\left(r,\frac{1}{f^{(k)}-1}\right)-N\left(r,\frac{1}{f^{(k+1)}}\right)+S(r,f),$$

其中

$$\begin{aligned}S(r,f)=&m\left(r,\frac{f^{(k)}}{f}\right)+m\left(r,\frac{f^{(k+1)}}{f}\right)+m\left(r,\frac{f^{(k+1)}}{f^{(k)}-1}\right)\\&+\log\left|\frac{f(0)(f^{(k)}(0)-1)}{f^{(k+1)}(0)}\right|+\log 2.\end{aligned}$$

该定理的证明可从 Bureau 恒等式

$$\frac{1}{f}\equiv\frac{f^{(k)}}{f}-\frac{f^{(k)}-1}{f^{(k+1)}}\cdot\frac{f^{(k+1)}}{f}$$

出发, 并应用 Jensen 公式与引理 1.4.1 就可推得.

W.K.Hayman 于 1959 年获得了一个十分深刻的结果 [95], 他指出对于亚纯函数 $f(z)$, 只需 $f(z)$ 取值的一个幂指量与 $f^{(k)}(z)$ 取值的一个幂指量便可界囿特征函数 $T(r,f)$.

**定理 1.6.2**(Hayman 不等式)　设 $f(z)$ 为 $|z|<R(\leqslant\infty)$ 内非多项式的亚纯函数, $k$ 为一正整数. 若 $f(0)\neq 0,\infty$, $f^{(k)}(0)\neq 1$, $f^{(k+1)}(0)\neq 0$ 及

$$(k+1)f^{(k+2)}(0)(f^{(k)}(0)-1)-(k+2)f^{(k+1)}(0)^2\neq 0,$$

则当 $0<r<R$ 时,

$$T(r,f)<\left(2+\frac{1}{k}\right)N\left(r,\frac{1}{f}\right)+\left(2+\frac{2}{k}\right)\overline{N}\left(r,\frac{1}{f^{(k)}-1}\right)+S(r,f),$$

其中

$$S(r,f)=\left(2+\frac{2}{k}\right)m\left(r,\frac{f^{(k+1)}}{f^{(k)}-1}\right)+\left(2+\frac{1}{k}\right)\left[m\left(r,\frac{f^{(k+1)}}{f}\right)+m\left(r,\frac{f^{(k)}}{f}\right)\right]$$

$$+\frac{1}{k}m\Big(r,\frac{f^{(k+2)}}{f^{(k+1)}}\Big)+4+\Big(2+\frac{1}{k}\Big)\log\left|\frac{f(0)(f^{(k)}(0)-1)}{f^{(k+1)}(0)}\right|$$

$$+\frac{1}{k}\log\left|\frac{f^{(k+1)}(0)(f^{(k)}(0)-1)}{(k+1)f^{(k+2)}(0)(f^{(k)}(0)-1)-(k+2)f^{(k+1)}(0)^2}\right|.$$

该定理的证明也可见文献 [207].

**注** 上述两个定理中对 $f(z)$ 在 $z=0$ 所作的限制是可以去掉的, 只需适当修改相应的余项 $S(r,f)$ 中的常数部分. 另外, 余项 $S(r,f)$ 仍具有定理 1.5.1 及其推论的性质.

从 Hayman 不等式及定理 1.5.2 的推论立即有

**推论** 设 $f(z)$ 为平面上的亚纯函数,$k\geqslant 1$. 若 $f(z)\neq 0$, $f^{(k)}(z)\neq 1$, 则 $f(z)$ 必恒为常数.

下面再给出由 G.Frank 与 G.Weissenborn[82] 所建立的不等式, 这在值分布理论的研究中是非常有用的.

**定理 1.6.3**(Frank-Weissenborn 引理) 设 $f(z)$ 为平面上超越亚纯函数, 任给 $\varepsilon>0,n\geqslant 1$, 则

$$n\overline{N}(r,f)\leqslant N\Big(r,\frac{1}{f^{(n)}}\Big)+(1+\varepsilon)N(r,f)+S(r,f).$$

在证明这个定理之前先给出两个引理.

**引理 1.6.1** 设 $f_j(z)\ (j=1,2,\cdots,k)$ 为区域 $D$ 内 $k$ 个亚纯函数. 若 $f_1,\cdots,f_k$ 线性无关, 则 $f_1,\cdots,f_k$ 的Wrouskian行列式

$$W(f_1,\cdots,f_k)\triangleq\begin{vmatrix} f_1 & \cdots & f_k\\ f_1' & \cdots & f_k'\\ \vdots & & \vdots\\ f^{(k-1)} & \cdots & f_k^{(k-1)}\end{vmatrix}\neq 0.$$

**证明** 用归纳法. 当 $k=1$ 时显然成立. 假设 $k=n-1$ 成立, 以下证 $k=n$ 时也成立.

假定 $W(f_1,\cdots,f_n)\equiv 0$ . 因由归纳法假设 $W(f_1,\cdots,f_{n-1})\neq 0$, 故可取出子区域 $d\subset D$ 使在 $d$ 内 $W(f_1,\cdots,f_{n-1})\neq 0,\infty$ 且 $f_j(z)\neq\infty(j=1,2,\cdots,n)$. 于是在 $d$ 内存在 $n-1$ 个全纯函数 $C_1(z),C_2(z),\cdots,C_{n-1}(z)$ 使

$$C_1(z)f_1^{(p)}+\cdots+C_{n-1}(z)f_{n-1}^{(p)}=f_n^{(p)}\qquad(z\in d,\quad p=0,1,\cdots,n-2).\qquad(1.6.1)$$

在行列式 $W(f_1,\cdots,f_n)$ 中从第 $n$ 列减去前 $n-1$ 列的分别以 $C_1(z),\cdots,C_{n-1}(z)$

为系数的线性组合, 再顾及 (1.6.1) 式就有

$$\begin{aligned} W(f_1,\cdots,f_n) &= W(f_1,\cdots,f_{n-1})\left[f_n^{(n-1)} - C_1(z)f_1^{(n-1)} - \cdots - C_{n-1}(z)f_{n-1}^{(n-1)}\right] \\ &\equiv 0 \qquad (z\in d), \end{aligned}$$

故

$$C_1(z)f_1^{(n-1)} + \cdots + C_{n-1}(z)f_{n-1}^{(n-1)} = f_n^{(n-1)} \quad (z\in d). \tag{1.6.2}$$

对 (1.6.1) 的每一式及 (1.6.2) 式两边求导就得

$$\begin{cases} C_1'(z)f_1 + \cdots + C_{n-1}'(z)f_{n-1} = 0, \\ C_1'(z)f_1' + \cdots + C_{n-1}'(z)f_{n-1}' = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ C_1'(z)f_1^{(n-2)} + \cdots + C_{n-1}'(z)f_{n-1}^{(n-2)} = 0. \end{cases}$$

由 $W(f_1,\cdots,f_{n-1}) \neq 0 (z\in d)$ 推得

$$C_j'(z) \equiv 0 \quad (z\in d, j=1,2,\cdots,n-1),$$

故 $C_j(z)$ 在 $d$ 内均为常数 $C_j (j=1,\cdots,n-1)$.

再由唯一性, 可知在区域 $D$ 内恒有

$$f_n = C_1 f_1 + \cdots + C_{n-1} f_{n-1},$$

从而矛盾. □

下面这个引理容易证明, 我们只列出而不加证明.

**引理 1.6.2** 设 $a(z)$ 与 $f_j(z) (j=1,\cdots,n)$ 均为区域 $D$ 内的亚纯函数, 则

$$W(a(z)f_1, a(z)f_2, \cdots, a(z)f_n) = a^n(z) W(f_1, f_2, \cdots, f_n).$$

现在来证明定理 1.6.3. 任取定自然数 $k$ 使 $\dfrac{n}{k} < \varepsilon$.

令

$$W(f) \triangleq W\left((f)^{(n+k)}, (zf)^{(n+k)}, \cdots, (z^k f)^{(n+k)}\right). \tag{1.6.3}$$

由行列式性质, 易知

$$W(f) = W(1, z, \cdots, z^{n+k-1}, f, zf, \cdots, z^k f),$$

故根据引理 1.6.1,$W(f) \neq 0$. 另外可验证 $W(f)$ 为 $f$ 的 $k+1$ 次常系数齐次微分多项式, 且每一单项中只出现阶数 $\geqslant n$ 的 $f$ 的导数. 故若令

$$A = \frac{W(f)}{\left(f^{(n)}\right)^{k+1}},$$

则

$$m(r,A)=S(r,f^{(n)})=S(r,f).$$

再结合引理 1.4.1 就有

$$\begin{aligned}0\leqslant m\left(r,\frac{1}{A}\right)&=T(r,A)-N\left(r,\frac{1}{A}\right)+O(1)\\&=N(r,A)-N\left(r,\frac{1}{A}\right)+S(r,f)\\&\leqslant N(r,W)+(k+1)N\left(r,\frac{1}{f^{(n)}}\right)-(k+1)N(r,f^{(n)})+S(r,f).\end{aligned}$$

另外由 (1.6.3) 式可知, $W(f)$ 的极点必是 $f$ 的极点, 再由引理 1.6.2 有

$$W(f)=f^{n+2k+1}W\left(\frac{1}{f},\frac{z}{f},\cdots,\frac{z^{n+k+1}}{f},1,z,\cdots,z^k\right),$$

所以

$$N(r,W)\leqslant(n+2k+1)N(r,f).$$

于是

$$\begin{aligned}0\leqslant&(n+2k+1)N(r,f)+(k+1)N\left(r,\frac{1}{f^{(n)}}\right)-(k+1)N(r,f)\\&-n(k+1)\overline{N}(r,f)+S(r,f)\\\leqslant&(n+k)N(r,f)+(k+1)N\left(r,\frac{1}{f^{(n)}}\right)-n(k+1)\overline{N}(r,f)+S(r,f),\end{aligned}$$

由此得

$$n(k+1)\overline{N}(r,f)\leqslant(k+1)N\left(r,\frac{1}{f^{(n)}}\right)+(n+k)N(r,f)+S(r,f),$$

故

$$\begin{aligned}n\overline{N}(r,f)&\leqslant N\left(r,\frac{1}{f^{(n)}}\right)+\frac{n+k}{k+1}N(r,f)+S(r,f)\\&<N\left(r,\frac{1}{f^{(n)}}\right)+(1+\varepsilon)N(r,f)+S(r,f).\end{aligned}$$

至此定理证毕. □

# 第 2 章　正规族理论的基础知识

本章将给出在球面距离意义下亚纯函数序列的收敛性概念，并把全纯函数族的正规性概念与亚纯函数族的正规性概念统一在球面距离的意义下. 今后本书中关于函数序列将出现按球面距离与按通常意义两种收敛性概念，凡没有出现按“球面距离”的收敛性均指按通常意义的收敛性.

## 2.1　在球面距离意义下亚纯函数序列的收敛性

**定义 2.1.1**　设 $a,b\in\overline{\mathbb{C}}$, 我们称一非负实数为 $a$ 与 $b$ 之间的球面距离, 记作 $|a,b|$:

$$|a,b|=\begin{cases}\dfrac{|a-b|}{\sqrt{1+|a|^2}\sqrt{1+|b|^2}}, & a\neq\infty,b\neq\infty,\\ \dfrac{1}{\sqrt{1+|a|^2}}, & a\neq\infty,b=\infty,\\ 0\,, & a=\infty,b=\infty.\end{cases}\tag{2.1.1}$$

根据球面距离的定义不难验证下面的性质:

$$\begin{gathered}|a,b|\leqslant|a-b|(a\neq\infty,b\neq\infty),\\ |a,c|\leqslant|a,b|+|b,c|,\\ |a,b|=\left|\frac{1}{a},\frac{1}{b}\right|,\end{gathered}\tag{2.1.2}$$

$$\log\frac{1}{|a-b|}+\log^+|a|+\log^+|b|\leqslant\log\frac{1}{|a,b|}(a\neq b,a\neq\infty,b\neq\infty).\tag{2.1.3}$$

**定义 2.1.2**　设点列 $\{a_n\}\subset\overline{\mathbb{C}}$, 称 $\{a_n\}$ 按球面距离收敛, 如果存在 $a\in\overline{\mathbb{C}}$, 使 $\lim\limits_{n\to\infty}|a_n,a|=0$, 此时 $a$ 称为 $\{a_n\}$ 在球面距离意义下的极限, 也称 $\{a_n\}$ 按球面距离收敛于 $a$. 显然, 如果 $a\neq\infty$, 或点列 $\{a_n\}$ 中除有限项外均为有穷数, 则 $a$ 即为通常的极限.

类似于柯西准则, 我们立即有

**引理 2.1.1**　数列 $\{a_n\}\subset\overline{\mathbb{C}}$ 按球面距离收敛的充分必要条件是任给 $\varepsilon>0$, 存在正整数 $N$, 使得当 $m,n>N$ 时, $|a_n,a_m|<\varepsilon$.

下面我们给出在球面距离意义下函数序列一致收敛的概念.

**定义 2.1.3** 称一函数序列 $\{f_n(z)\}$($f_n(z)$ 可取值无穷) 在一集 $E$ 上按球面距离一致收敛, 如果任给 $\varepsilon > 0$, 存在正整数 $N$, 使当 $n,m > N$ 时,$|f_n(z), f_m(z)| < \varepsilon (z \in E)$.

**定义 2.1.4** 设 $\{f_n(z)\}$ 为区域 $D$ 内的一亚纯函数序列, 我们称 $\{f_n(z)\}$ 在区域 $D$ 上按球距内闭一致收敛, 如果 $\{f_n(z)\}$ 在 $D$ 内任一有界闭域上按球距一致收敛.

此时, 根据引理 2.1.1 可知 $\{f_n(z)\}$ 在 $D$ 上按球距内闭一致收敛于可取无穷的极限函数. 为了讨论极限函数的性质, 也为了讨论在球距意义下的收敛性与在通常意义下的收敛性的关系, 我们证明以下性质.

**定理 2.1.1** 设 $\{f_n(z)\}$ 为区域 $D$ 内的亚纯函数序列, 则 $\{f_n(z)\}$ 在 $D$ 上按球距内闭一致收敛的充分必要条件是对 $D$ 内每一点 $z$, 总存在 $\Delta(z) \subset D$, 使 $\{f_n(z)\}$ 或 $\{\frac{1}{f_n(z)}\}$ 在 $\Delta(z)$ 上按通常意义一致收敛.

**证明** 根据 (2.1.2) 式及 Heine-Borel 定理, 其充分性是容易证明的. 现证必要性.

设 $f(z)$ 为极限函数, 并任取定 $z_0 \in D$. 根据 (2.1.2) 只需讨论 $f(z_0) \neq \infty$ 的情形. 任取出一闭圆 $\overline{\Delta}(z_0, \rho) \subset D$. 根据条件, 存在一正整数 $m$, 使当 $z \in \overline{\Delta}(z_0, \rho)$ 时, $|f(z), f_m(z)| < \dfrac{1}{6\sqrt{1+|f(z_0)|^2}}$. 由于 $f_m(z)$ 为亚纯函数, 故存在一较小正数 $r < \rho$, 使当 $z \in \overline{\Delta}(z_0, r)$ 时, $|f_m(z), f_m(z_0)| < \dfrac{1}{6\sqrt{1+|f(z_0)|^2}}$, 于是, 当 $z \in \overline{\Delta}(z_0, r)$ 时

$$|f(z), f(z_0)| \leqslant |f(z), f_m(z)| + |f_m(z), f_m(z_0)| + |f_m(z_0), f(z_0)| < \frac{1}{2\sqrt{1+|f(z_0)|^2}},$$

由此可知, 在 $\overline{\Delta}(z_0, r)$ 上 $f(z) \neq \infty$, 且

$$\frac{|f(z) - f(z_0)|}{\sqrt{1+|f(z)|^2}} < \frac{1}{2},$$

这表明 $f(z)$ 在 $\overline{\Delta}(z_0, r)$ 上有界, 设 $|f(z)| \leqslant M (z \in \overline{\Delta}(z_0, r))$. 又根据定理条件, 存在充分大的正整数 $N$ 使当 $n > N$ 时

$$|f_n(z), f(z)| < \frac{1}{2\sqrt{1+M^2}} \quad (z \in \overline{\Delta}(z_0, r)),$$

于是当 $z \in \overline{\Delta}(z_0, r)$ 且 $n > N$ 时

$$\frac{1}{\sqrt{1+M^2}} \leqslant \frac{1}{\sqrt{1+|f(z)|^2}} = |f(z), \infty| \leqslant |f(z), f_n(z)| + |f_n(z), \infty|$$

$$< \frac{1}{2\sqrt{1+M^2}} + |f_n(z), \infty|,$$

故

$$\sqrt{1+|f_n(z)|^2} < 2\sqrt{1+M^2} \quad (z \in \overline{\Delta}(z_0, r)).$$

由此可知当 $n > N$ 时,$f_n(z)$ 在 $\overline{\Delta}(z_0, r)$ 上没有极点, 且

$$|f_n(z) - f(z)| < 2(1+M^2)|f_n(z), f(z)|,$$

这表明 $\{f_n(z)\}$ 在 $\overline{\Delta}(z_0, r)$ 上按通常意义一致收敛. □

**推论 1**　*设亚纯函数序列 $\{f_n(z)\}$ 在区域 $D$ 上按球距内闭一致收敛于亚纯函数 $f(z)$. 若 $f(z)$ 在区域 $D$ 内全纯, 则 $\{f_n(z)\}$ 在 $D$ 上按通常意义内闭一致收敛于 $f(z)$.*

由定理 2.1.1, 可得极限函数的如下性质.

**定理 2.1.2**　*在区域 $D$ 上按球距内闭一致收敛的亚纯函数序列 $\{f_n(z)\}$ 的极限函数 $f(z)$ 在 $D$ 内或为亚纯函数或恒为 $\infty$.*

**证明**　根据定理 2.1.1, 极限函数 $f(z)$ 有如下性质: 对区域 $D$ 内的任一点 $z$, 必存在一邻域 $\Delta(z) \subset D$, 使 $f(z)$ 或 $\dfrac{1}{f(z)}$ 在 $\Delta(z)$ 内全纯. 现假定 $f(z) \not\equiv \infty$. 设 $f(z_0) \neq \infty (z_0 \in D)$. 任取一点 $z \in D$, 用完全属于 $D$ 的折线 $L$ 连接 $z_0$ 与 $z$. 根据上面的性质及 Heine-Borel 定理, 存在 $L$ 上的有限个点 $z_0, z_1, \cdots, z_{n-1}, z_n = z$ 及相应的邻域 $\Delta(z_0), \Delta(z_1), \cdots, \Delta(z)$, 使在每个这样的邻域内, $f(z)$ 或 $\dfrac{1}{f(z)}$ 全纯, 还可要求每相邻两个邻域没公共点. 因 $f(z_0) \neq \infty$, 所以在 $\Delta(z_0)$ 内, 或者 $f(z)$ 全纯或者 $\dfrac{1}{f(z)}$ 全纯且不恒为零. 对于后一种情形, 此时 $f(z)$ 亚纯, 因此 $f(z)$ 在 $\Delta(z_0)$ 内亚纯. 用同样的方法, 可以从 $f(z)$ 在 $\Delta(z_0)$ 内亚纯推得 $f(z)$ 在 $\Delta(z_1)$ 内也亚纯. 依次类推, 最后得到 $f(z)$ 在 $\Delta(z)$ 内亚纯. 至此定理证毕. □

**定理 2.1.3**　*设 $\{f_n(z)\}$ 为区域 $D$ 内的全纯函数序列, 则 $\{f_n(z)\}$ 在 $D$ 上按球距内闭一致收敛的充分必要条件是 $\{f_n(z)\}$ 或者在 $D$ 上内闭一致收敛, 或者在 $D$ 上内闭一致趋于 $\infty$.*

**证明**　充分性是容易证明的, 我们只证必要性.

设 $\{f_n(z)\}$ 在 $D$ 上按球距内闭一致收敛于 $f(z)$. 根据定理 2.1.2,$f(z)$ 或恒为 $\infty$ 或是 $D$ 内的亚纯函数. 若 $f(z)$ 恒为 $\infty$, 则显然 $\{f_n(z)\}$ 在 $D$ 上内闭一致趋于 $\infty$. 现设 $f(z)$ 为 $D$ 内亚纯函数. 根据 Heine-Borel 定理, 只需证明对任一点 $z_0 \in D$, 都存在 $z_0$ 的一个邻域, 使 $\{f_n(z)\}$ 在此邻域内一致收敛. 根据定理 2.1.1, 存在 $z_0$ 的一个邻域 $\Delta(z_0)$, 使 $\{f_n(z)\}$ 或 $\{\dfrac{1}{f_n(z)}\}$ 在 $\Delta(z_0)$ 上一致收敛. 如果是后者, 即 $\{\dfrac{1}{f_n(z)}\}$ 在 $\Delta(z_0)$ 上一致收敛于全纯函数 $\dfrac{1}{f(z)}$. 由于 $\dfrac{1}{f_n(z)} \neq 0 (n = 1, 2, \cdots)$, 再注意到 $f(z)$

为亚纯函数, 故在 $\Delta(z_0)$ 内 $\dfrac{1}{f(z)} \neq 0$, 于是 $\{f_n(z)\}$ 在 $z_0$ 的一个邻域内一致收敛. 至此定理证毕. □

**推论 2** 设亚纯函数序列 $\{f_n(z)\}$ 在区域 $D$ 上按球距内闭一致收敛于亚纯函数 $f(z)$. 若 $\{f_n(z)\}$ 为 $D$ 内的全纯函数序列, 则 $f(z)$ 在 $D$ 内全纯, 且 $\{f_n(z)\}$ 在 $D$ 上按通常意义内闭一致收敛于 $f(z)$.

设 $a, b$ 为两个有穷复数, 不难验证, 存在仅依赖于 $a, b$ 的正常数 $k$ 使对任意两个复数 $z_1, z_2$, 总有 $|az_1+b, az_2+b| \leqslant k|z_1, z_2|$. 又因为任何分式线性变换都可分解成线性变换与反演变换的复合, 故有如下性质:

**定理 2.1.4** 亚纯函数序列的按球距内闭一致收敛性在分式线性变换下是不变的.

## 2.2 亚纯函数正规族理论的基本概念

本节介绍亚纯函数正规族理论的基本概念与性质.

**定义 2.2.1** 设 $\mathcal{F}$ 为区域 $D$ 内的一族亚纯函数. 如果从 $\mathcal{F}$ 中任一函数序列 $\{f_n(z)\}$ 均可选出一个子序列 $\{f_{n_k}(z)\}$ 在区域 $D$ 上按球距内闭一致收敛, 则称 $\mathcal{F}$ 在区域 $D$ 内正规.

我们知道,P.Montel 在建立正规族理论时, 对全纯函数族情形和亚纯函数族情形给出了正规性的概念. 下面指出它们与本书按球距的定义所给出的概念是等价的.

**定理 2.2.1** 设 $\mathcal{F}$ 为区域 $D$ 内的一亚纯函数族, 则 $\mathcal{F}$ 在 $D$ 内正规的充分必要条件是如果从 $\mathcal{F}$ 的任一函数序列 $\{f_n(z)\}$ 中均可选出一个子序列 $\{f_{n_k}(z)\}$ 有如下性质: 对于 $D$ 内每一点 $z$, 总存在一个邻域 $\Delta(z) \subset D$, 使 $\{f_{n_k}(z)\}$ 或 $\left\{\dfrac{1}{f_{n_k}(z)}\right\}$ 按通常意义在 $\Delta(z)$ 上一致收敛.

这个定理从定理 2.1.1 立即就可推得.

另外, 由定理 2.1.3 立即有

**定理 2.2.2** 设 $\mathcal{F}$ 为区域 $D$ 内的一全纯函数族, 则 $\mathcal{F}$ 在 $D$ 内正规的充要条件是从 $\mathcal{F}$ 的任一函数序列 $\{f_n(z)\}$ 中必可选出一子序列或者在 $D$ 上内闭一致收敛或者在 $D$ 上内闭一致趋于 $\infty$.

我们还要引入在一点正规的概念. 这将给今后判断函数族是否正规带来很大的方便.

**定义 2.2.2** 设 $\mathcal{F}$ 为区域 $D$ 的一族亚纯函数. 我们称 $\mathcal{F}$ 在 $D$ 内一点 $z_0$ 正规, 如果存在 $z_0$ 的一个邻域 $\Delta(z_0)$, 使 $\mathcal{F}$ 在 $\Delta(z_0)$ 内正规.

下面我们将给出在区域内正规与在一点正规之间的关系.

**定理 2.2.3** 设 $\mathcal{F}$ 为区域 $D$ 内的一亚纯函数族，则 $\mathcal{F}$ 在 $D$ 内正规的充要条件是 $\mathcal{F}$ 在 $D$ 内每一点正规.

**证明** 必要性显然，现证充分性. 设 $\{f_n(z)\} \subset \mathcal{F}$. 首先构造一列有界区域 $\{D_j\}$ 使 $\overline{D}_j \subset D_{j+1}$, $\bar{D}_j \subset D(j=1,2,\cdots)$, $\bigcup\limits_{j=1}^{\infty} D_j = D$. 根据定理条件及 Heine-Borel 定理，可从 $\{f_n(z)\}$ 中选出子序列 $\{f_{1n}(z)\}$ 在 $\overline{D}_1$ 上按球距一致收敛. 同样的方法可从 $\{f_{1n}(z)\}$ 中选出一子序列 $\{f_{2n}(z)\} \subset \{f_{1n}(z)\}$, 在 $\overline{D}_2$ 上按球距一致收敛, 这样继续下去得一串子序列：

$$\{f_{1n}(z)\} \supset \{f_{2n}(z)\} \supset \cdots,$$

显然子序列 $\{f_{nn}(z)\}$ 在每个 $\overline{D}_j$ 上都按球距一致收敛, 再结合 Heine-Borel 定理可知 $\{f_{nn}(z)\}$ 在 $D$ 上按球距内闭一致收敛. 至此定理证毕. □

由定理 2.1.4 立即有

**定理 2.2.4** 亚纯函数族的正规性在分式线性变换下是不变的.

研究一个亚纯函数族在什么条件下正规，即对正规定则的研究，是本书的中心内容. 我们首先给出一个经典的正规定则即 Marty 定则. 读者以后会看到，它是本书展开主要研究内容的出发点. 它所给出的条件不仅充分而且必要，并且有别于其余大部分的正规定则.

**定理 2.2.5**(Marty 正规定则) 设 $\mathcal{F}$ 为区域 $D$ 内的一族亚纯函数，则 $\mathcal{F}$ 在 $D$ 内正规的充分必要条件是对任一有界闭域 $\overline{G} \subset D$, 存在一正数 $M = M(\overline{G})$, 使对每个 $f(z) \in \mathcal{F}$, 恒有

$$\frac{|f'(z)|}{1+|f(z)|^2} \leqslant M \quad (z \in \overline{G}), \tag{2.2.1}$$

即球面导数之集 $\{f^{\#}(z)\}$ 在 $D$ 上内闭一致有界.

在给出此定理的证明之前我们先证一个引理.

**引理 2.2.1** 设 $\{f_n(z)\}$ 为区域 $D$ 内的全纯函数序列且在 $D$ 上一致有界，则必存在一子列 $\{f_{n_k}(z)\}$ 在 $D$ 上内闭一致收敛.

**证明** 设 $|f_n(z)| \leqslant M(z \in D, n=1,2,\cdots)$. 由Cauchy积分公式，可知相应的导函数序列 $\{f_n'(z)\}$ 在 $D$ 上内闭一致有界. 以下用对角线方法证明从 $\{f_n(z)\}$ 中可取出一子列在 $D$ 上内闭一致收敛. 我们把 $D$ 内的一切有理点记为 $z_1, \cdots, z_n, \cdots$, 根据 Bolzano-Weierstrass 定理，可选出一子序列 $\{f_{1n}(z)\} \subset \{f_n(z)\}$ 在点 $z_1$ 收敛. 同样又可选出一子序列 $\{f_{2n}(z)\} \subset \{f_{1n}(z)\}$ 在点 $z_2$ 收敛. 如此继续下去，可取出对角线函数序列 $f_{11}(z), f_{22}(z), \cdots, f_{nn}(z), \cdots$ 在每一点 $z_j (j=1,2,\cdots)$ 上都收敛. 以下验证函数序列 $\{f_{nn}(z)\}$ 在 $D$ 上内闭一致收敛. 任取有界闭集 $E \subset D$, 显然存在一正数 $\delta(<1)$ 使

$$V \triangleq \bigcup_{z \in E} \overline{\Delta}(z, \delta) \subset D.$$

不难验证 $V$ 也是有界闭集, 故 $\{f_n'(z)\}$ 在 $V$ 上一致有界, 设

$$|f_n'(z)| \leqslant K \quad (z \in V).$$

任给 $\varepsilon > 0(\varepsilon < 3K)$, 根据 Heine-Borel 定理, 存在有限个有理点 $z_1, \cdots, z_k$ 使

$$E \subset \bigcup_{j=1}^{k} \left( |z - z_j| \leqslant \frac{\delta}{3K}\varepsilon \right). \tag{2.2.2}$$

因 $\{f_{nn}(z)\}$ 在 $z_j(j=1,\cdots,k)$ 上均收敛, 故存在一正整数 $N$, 使当 $n, m \geqslant N$ 时

$$|f_{nn}(z_j) - f_{mm}(z_j)| < \frac{\varepsilon}{3} \quad (j = 1, 2, \cdots, k).$$

对任一点 $z \in E$, 由 (2.2.2), 存在 $z_j(1 \leqslant j \leqslant k)$ 使 $|z - z_j| \leqslant \dfrac{\delta}{3K}\varepsilon$, 于是

$$\begin{aligned} &|f_{nn}(z) - f_{mm}(z)| \leqslant |f_{nn}(z) - f_{nn}(z_j)| + |f_{nn}(z_j) - f_{mm}(z_j)| \\ &+ |f_{mm}(z) - f_{mm}(z_j)| < 2|z - z_j| \max_{\xi \in V} |f'(\xi)| + \frac{\varepsilon}{3} \leqslant 2 \cdot \frac{\varepsilon\delta}{3K} \cdot K + \frac{\varepsilon}{3} < \varepsilon. \end{aligned}$$

至此引理证毕. □

下面是定理 2.2.5 的证明.

**证明** 先证必要性. 假定对某一有界闭域 $\overline{G} \subset D$, 存在一函数序列 $\{f_n(z)\} \subset \mathcal{F}$ 及点列 $z_n \in \overline{G}$, 使

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|f_n'(z_n)|}{1 + |f_n(z_n)|^2} = \infty. \tag{2.2.3}$$

不妨设 $z_n \to z_0 \in \overline{G}(n \to \infty)$, 任取 $z_0$ 的一邻域 $\Delta(z_0), \overline{\Delta}(z_0) \subset D$, 由 $\mathcal{F}$ 的正规性, 存在 $\{f_n(z)\}$ 的子序列 $\{f_{n_k}(z)\}$ 在 $\overline{\Delta}(z_0)$ 上按球距一致收敛于亚纯函数 $f(z)$ 或一致趋于 $\infty$. 如果是前者, 则与 (2.2.3) 式矛盾; 如果是后者, 根据 (2.1.2) 式及 (1.3.5) 式也与 (2.2.3) 式矛盾.

再证充分性. 任取定 $z_0 \in D$ 使 $f(z_0) \neq 0, \infty$. 再取 $z_0$ 的一个邻域 $\Delta(z_0, \delta)$ 使 $\overline{\Delta}(z_0, \delta) \subset D$. 根据条件, 存在正数 $M$ 使

$$\frac{|f'(z)|}{1 + |f(z)|^2} \leqslant M \qquad (f \in \mathcal{F}, z \in \overline{\Delta}(z_0, \delta))$$

设 $f(z) \in \mathcal{F}$. 令 $z = z_0 + re^{i\theta}(0 < r \leqslant \delta)$ 及

$$h(t) = \arctan \left| f(z_0 + te^{i\theta}) \right| \qquad (0 \leqslant t \leqslant r).$$

任意固定 $r: 0<r\leqslant\delta$. 取 $\theta$ 使得线段 $\overline{z_0 z}$ 上没有 $f(z)$ 的零点和极点. 这样 $h(t)$ 为 $[0,r]$ 上具有连续导数的实函数. 于是

$$\big|\arctan|f(z)|-\arctan|f(z_0)|\big|=|h(r)-h(0)|=\left|\int_0^r h'(t)\mathrm{d}t\right|.$$

而

$$\begin{aligned}
h'(t)&=\frac{1}{1+|f(z_0+t\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})|^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left|f(z_0+t\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})\right|\\
&=\frac{1}{1+|f(z_0+t\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})|^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathrm{e}^{\mathrm{Re}(\ln f(z_0+t\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}))}\\
&=\frac{|f(z_0+t\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})|}{1+|f(z_0+t\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})|^2}\mathrm{Re}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\ln\left(f(z_0+t\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})\right)\right)\right)\\
&=\frac{|f(z_0+t\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})|}{1+|f(z_0+t\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})|^2}\mathrm{Re}\left(\frac{f'(z_0+t\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})}{f(z_0+t\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right),
\end{aligned}$$

故

$$|h'(t)|\leqslant\frac{|f'(z_0+t\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})|}{1+|f(z_0+t\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})|^2}.$$

由此有

$$\big|\arctan|f(z)|-\arctan|f(z_0)|\big|\leqslant\int\frac{|f'(z_0+t\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})|}{1+|f(z_0+t\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})|^2}\mathrm{d}t\leqslant Mr=M|z-z_0|.$$

于是, 若 $|z-z_0|\leqslant\min\left\{\delta,\dfrac{\pi}{12M}\right\}$, 则当 $|f(z_0)|\leqslant1$ 时

$$\arctan|f(z)|\leqslant\frac{\pi}{12}+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{3}.$$

因此

$$|f(z)|\leqslant\sqrt{3}. \tag{2.2.4}$$

而当 $|f(z_0)|>1$ 时,

$$\arctan|f(z)|>\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{12}=\frac{\pi}{6}.$$

由此得

$$|f(z)|>\frac{1}{\sqrt{3}}. \tag{2.2.5}$$

另外由连续性可知, 对 $z=z_0+r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ 中的 $\theta$ 所作的限制可以去掉. 从而 (2.2.4) 式或 (2.2.5) 式在 $\overline{\Delta}(z_0,\delta)$ 上成立. 若 $f(z_0)=0$ 或 $\infty$, 则在点 $z_0$ 附近适当取一点, 考虑仍可使 (2.2.4) 式或 (2.2.5) 式成立. 再根据引理 2.2.1, 定理 2.2.4 及定理 2.2.3 就可知 $\mathcal{F}$ 在 $D$ 内正规. □

由 Marty 正规定则及其证明过程立刻就得

**定理 2.2.6** 设 $\mathcal{F}$ 为区域 $D$ 内的一亚纯函数族, 则 $\mathcal{F}$ 在 $D$ 内正规的充要条件是对任一点 $z_0 \in D$, 存在 $z_0$ 的一邻域 $\Delta(z_0) \subset D$ 及正常数 $M = M(z_0)$ 使 $\mathcal{F}$ 中每个 $f(z)$ 在 $\Delta(z_0)$ 内或者恒有 $|f(z)| \leqslant M$ 或者恒有 $\left|\dfrac{1}{f(z)}\right| \leqslant M$.

## 2.3 Hayman 猜想

本书前言中已指出,W.K.Hayman 所提出的关于正规定则的猜想已在 20 世纪七八十年代全部被证实, 本节将列出这些正规定则, 其中定理 2.3.3, 定理 2.3.4 及定理 2.3.5 是被进一步改进的结果, 并就定理 2.3.1 用消去原始值方法予以证明. 在本书第 3 章中还将用 Zalcman-Pang 方法给出定理 2.3.1, 定理 2.3.3 及定理 2.3.5 的新的证明.

**定理 2.3.1**[89] 设 $\mathcal{F}$ 为区域 $D$ 内的亚纯函数族, $k \geqslant 1$ 为一正整数, 若对于任意 $f \in \mathcal{F}$, $f \neq 0, f^{(k)} \neq 1$, 那么 $\mathcal{F}$ 在区域 $D$ 内正规.

**定理 2.3.2**[145] 设 $\mathcal{F}$ 为区域 $D$ 内的全纯函数族,$k \geqslant 1$ 为一正整数. 若对于任意的 $f \in \mathcal{F}$,$f^k f' \neq 1$, 那么 $\mathcal{F}$ 在区域 $D$ 内正规.

**定理 2.3.3**[26, 46, 217] 设 $\mathcal{F}$ 为区域 $D$ 内的亚纯函数族,$k \geqslant 1$ 为一正整数. 若对于任意 $f \in \mathcal{F}$,$f^k f' \neq 1$, 那么 $\mathcal{F}$ 在区域 $D$ 内正规.

**定理 2.3.4**[212] 设 $\mathcal{F}$ 为区域 $D$ 内的全纯函数族,$a(\neq 0)$ 为一有穷复数,$k \geqslant 2$ 为一正整数. 若对于任意 $f \in \mathcal{F}$,$f' - f^k \neq a$, 那么 $\mathcal{F}$ 在区域 $D$ 内正规.

**定理 2.3.5**[26, 46, 217] 设 $\mathcal{F}$ 为区域 $D$ 内的亚纯函数族,$a(\neq 0)$ 为一有穷复数, $k \geqslant 3$ 为一正整数. 若对于任意 $f \in \mathcal{F}$, $f' - f^k \neq a$, 那么 $\mathcal{F}$ 在区域 $D$ 内正规.

**注** 定理 2.3.2 是定理 2.3.3 的特殊情形, 定理 2.3.4 是定理 2.3.5 的特殊情形, 我们在这里列出来是为了反映在各个研究阶段数学工作者们所取得的成果. 其中定理 2.3.1 由文献 [89] 得到; 关于定理 2.3.2, 当 $k \geqslant 2$ 时由文献 [210] 得到, 当 $k = 1$ 时, 由文献 [145] 得到; 关于定理 2.3.3, 当 $k \geqslant 5$ 时由文献 [210] 得到, 当 $k \geqslant 3$ 时, 由文献 [88] 得到, 当 $k = 2$ 时由文献 [147] 得到, 当 $k = 1$ 时分别由文献 [46], [26] 及 [217] 得到; 关于定理 2.3.4, 当 $k = 3$ 时由文献 [62] 得到, 当 $k = 2$ 时由文献 [212] 得到; 关于定理 2.3.5, 当 $k = 5$ 时分别由文献 [121], [120] 及 [113] 互相独立得到, 当 $k = 4$ 时由文献 [148] 得到, 当 $k = 3$ 时分别由文献 [46], [26] 及 [217] 得到.

在证明定理 2.3.1 之前我们还需二个引理, 这也是应用消去原始值方法证明正规定则时常需要的性质, 它们的证明可参阅文献 [91].

**引理 2.3.1** 当 $a > \mathrm{e}$ 及 $x > 0$ 时有

$$\log x + a\log^{+}\log^{+}\frac{1}{x} \leqslant a(\log a - 1) + \log^{+} x.$$

**引理 2.3.2**　设 $U(r)$ 为一非负非减的函数, 定义在区间 $0 < r < R$ 上, 又设 $a, b$ 及 $c$ 均为正数, 若不等式

$$U(r) < a\log^+ U(\rho) + b\left(\log^+ \frac{1}{\rho - r} + \log^+ \rho + \log \frac{1}{r}\right) + c$$

于 $0 < r < \rho < R$ 时成立, 则当 $0 < r < R$ 时

$$U(r) < 4(a+b)\left(\log \frac{R}{R-r} + \log^+ R + \log^+ \frac{1}{R}\right) + 20(a+b+1)^2 + 2c.$$

现在我们来证明定理 2.3.1.

**证明**　根据定理 2.2.3 及定理 2.2.6, 我们只需证明对任一点 $z_0 \in D$ 及 $z_0$ 的任一领域 $\Delta(z_0, r) \subset D$, 存在一正数 $K$, 使对任一 $\{f_n(z)\} \subset \mathcal{F}$ 在圆 $\Delta\left(z_0, \frac{r}{64}\right)$ 内或者恒有 $|f(z)| < K$, 或者恒有 $\left|\frac{1}{f(z)}\right| < K$. 命 $F(z) = \frac{1}{r^k} f(rz + z_0)$, 于是 $F(z)$ 在 $|z| < 1$ 内亚纯且

$$F(z) \neq 0, F^{(k)}(z) \neq 1 \quad (|z| < 1).$$

区分两种情形:

**情形 1**　在圆 $|z| < \frac{1}{16}$ 内, 恒有

$$|F(z)| + |F'(z)| + \cdots + \left|F^{(k)}(z)\right| + \left|F^{(k+1)}(z)\right| \geqslant \frac{1}{8}.$$

此时再分两种情形:

**情形 1.1**　在圆 $|z| < \frac{1}{64}$ 内, 或者恒有 $|F(z)| < 1$ 或者恒有 $|F(z)| > 1$.

**情形 1.2**　在圆 $|z| < \frac{1}{64}$ 内存在一点 $z_1$, 使 $|F(z_1)| = 1$. 于是当 $0 < r < \frac{1}{16}$ 时, 有

$$m\left(r, z_1, \frac{1}{F}\right) < \sum_{j=1}^{k+1} m\left(r, z_1, \frac{F^{(j)}}{F}\right) + \log 8(2+k).$$

再应用定理 1.5.1 的推论 2 及引理 2.3.2 就有

$$T\left(\frac{3}{64}, z_1, \frac{1}{F}\right) < K.$$

于是

$$\log^+ M\left(\frac{1}{32}, z_1, \frac{1}{F}\right) < K.$$

又因 $\overline{\Delta}\left(0, \frac{1}{64}\right) \subset \overline{\Delta}\left(z_1, \frac{1}{32}\right)$, 故

$$\log^+ M\left(\frac{1}{64}, \frac{1}{F}\right) < K.$$

**情形 2** 在圆 $|z| < \frac{1}{16}$ 内存在一点 $z_2$, 使

$$|F(z_2)| + |F'(z_2)| + \cdots + \left|F^{(k)}(z_2)\right| + \left|F^{(k+1)}(z_2)\right| < \frac{1}{8}. \tag{2.3.1}$$

我们又区分两种情形.

**情形 2.1** 在圆 $|z| < \frac{1}{16}$ 内, 恒有 $\left|F^{(k+1)}(z)\right| < \frac{1}{8}$, 于是结合 (2.3.1) 式可知, 在圆 $|z| < \frac{1}{16}$ 内, 恒有 $|F(z)| < k+2$.

**情形 2.2** 在圆 $|z| < \frac{1}{16}$ 内存在一点 $z_3$ 使 $\left|F^{(k+1)}(z_3)\right| \geqslant \frac{1}{8}$, 于是在圆 $|z| < \frac{1}{16}$ 内存在一点 $z_4$, 使 $\left|F^{(k+1)}(z_4)\right| = \frac{1}{8}$, 且当 $z \in \overline{z_2 z_4}$ 时, $\left|F^{(k+1)}(z)\right| \leqslant \frac{1}{8}$. 因而当 $z \in \overline{z_2 z_4}$ 时,

$$\left|F^{(k)}(z)\right| \leqslant \left|F^{(k)}(z_2)\right| + \left|\int_{\overline{z z_2}} f^{(k+1)}(\xi)\,\mathrm{d}\xi\right| < \frac{1}{8} + \frac{1}{64} < \frac{1}{7}.$$

由此, 特别地有 $\left|F^{(k)}(z_4)\right| < \frac{1}{7}$, 且通过依次积分, 可得 $|F(z_4)| < k+1$.

这时再区分两种情形.

**情形 2.2.1** $\left|F^{(k+2)}(z_4)\right| \geqslant \frac{1}{2}$.

应用定理 1.6.2 于圆 $\Delta\left(z_4, \frac{3}{4}\right)$, 当 $0 < r < \frac{3}{4}$ 时, 有

$$\begin{aligned} T(r, z_4, F) <& \left(2 + \frac{2}{k}\right) m\left(r, z_4, \frac{F^{(k+1)}}{F^{(k)} - 1}\right) + \left(2 + \frac{1}{k}\right) \log\left|\frac{F(z_4)(F^{(k)}(z_4) - 1)}{F^{(k+1)}(z_4)}\right| \\ &+ \left(2 + \frac{1}{k}\right)\left(m\left(r, z_4, \frac{F^{(k+1)}}{F}\right) + m\left(r, z_4, \frac{F^{(k)}}{F}\right)\right) + \frac{1}{k} m\left(r, z_4, \frac{F^{(k+2)}}{F^{(k+1)}}\right) \\ &+ 4 + \frac{1}{k}\log\left|\frac{F^{(k+1)}(z_4)(F^{(k)}(z_4) - 1)}{(k+1)F^{(k+2)}(z_4)(F^{(k)}(z_4) - 1) - (k+2)F^{(k+1)}(z_4)^2}\right|. \end{aligned}$$

为了估计上式右端, 我们应用定理 1.5.1 的推论 2 于 $m\left(r, z_4, \frac{F^{(k+1)}}{F}\right)$ 及 $m\left(r, z_4, \frac{F^{(k)}}{F}\right)$, 其中取 $0 < r < \rho < \frac{3}{4}$. 又应用定理 1.5.1 的推论 1 于 $m\left(r, z_4, \frac{F^{(k+1)}}{F^{(k)} - 1}\right)$ 及

$m\left(r,z_4,\dfrac{F^{(k+2)}}{F^{(k+1)}}\right)$, 其中考虑 $0<r<\rho',\rho'=\dfrac{1}{2}(r+\rho)$, 这时, 出现了项 $\log^+T\Big(\rho',z_4,F^{(k)}\Big)$ 与 $\log^+T\left(\rho',z_4,F^{(k+1)}\right)$, 而

$$T\left(\rho',z_4,F^{(k)}\right)\leqslant(k+1)T\left(\rho',z_4,F\right)+m\left(\rho',z_4,\frac{F^{(k)}}{F}\right),$$

$$T\left(\rho',z_4,F^{(k+1)}\right)\leqslant(k+2)T\left(\rho',z_4,F\right)+m\left(\rho',z_4,\frac{F^{(k+1)}}{F}\right).$$

再应用定理 1.5.1 的推论 2 于 $m\left(\rho',z_4,\dfrac{F^{(k)}}{F}\right)$ 及 $m\left(\rho',z_4,\dfrac{F^{(k+1)}}{F}\right)$, 其中 $0<\rho'<\rho$, 这样就有

$$\begin{aligned}T(r,z_4,F)<K\Bigg[&1+\log^+\frac{1}{r}+\log^+\frac{1}{\rho-r}+\log^+\rho+\log^+T(\rho,z_4,F)\\&+\log^+\log^+\frac{1}{|F(z_4)|}+\log^+\log^+\frac{1}{|F^{(k)}(z_4)-1|}\\&+\log^+\log^+\frac{1}{\left|F^{(k+1)}(z_4)\right|}\Bigg]+\left(2+\frac{1}{k}\right)\log\left|\frac{F(z_4)(F^{(k)}(z_4)-1)}{F^{(k+1)}(z_4)}\right|\\&+\frac{1}{k}\log\left|\frac{F^{(k+1)}(z_4)(F^{(k)}(z_4)-1)}{(k+1)F^{(k+2)}(z_4)(F^{(k)}(z_4)-1)-(k+2)F^{(k+1)}(z_4)^2}\right|\end{aligned}$$

于 $0<r<\rho<\dfrac{3}{4}$ 成立.

在上式两端同加 $\log\dfrac{1}{|F(z_4)|}$, 应用 Jensen 公式与引理 2.3.1, 并计及

$$\frac{1}{2}<\left|F^{(k)}\left(z_4\right)-1\right|<1,\left|F\left(z_4\right)\right|<k+1,\left|F^{(k+1)}\left(z_4\right)\right|=\frac{1}{8},$$

$$\begin{aligned}&\left|(k+1)F^{(k+2)}\left(z_4\right)\left(F^{(k)}\left(z_4\right)-1\right)-(k+2)F^{(k+1)}\left(z_4\right)^2\right|\\&>\frac{k+1}{4}-\frac{k+2}{64}\geqslant\frac{28}{64},\end{aligned}$$

就有

$$T\left(r,z_4,\frac{1}{F}\right)<K\left[1+\log^+\frac{1}{r}+\log^+\frac{1}{\rho-r}+\log^+T\left(\rho,z_4,\frac{1}{F}\right)\right]$$

于 $0<r<\rho<\dfrac{3}{4}$ 成立. 再应用引理 2.3.2, 有

$$T\left(\frac{1}{2},z_4,\frac{1}{F}\right)<K.$$

由此得

$$\log^+ M\left(\frac{1}{4}, z_4, \frac{1}{F}\right) < K.$$

因 $\Delta\left(0, \frac{1}{16}\right) \subset \Delta\left(z_4, \frac{1}{4}\right)$, 故

$$\log^+ M\left(\frac{1}{16}, \frac{1}{F}\right) < K.$$

**情形 2.2.2** $\left|F^{(k+2)}(z_4)\right| < \frac{1}{2}$. 我们又区分两种情形:

**情形 2.2.2.1** 在圆 $|z| < \frac{1}{16}$ 内, 恒有 $\left|F^{(k+2)}(z)\right| < \frac{1}{2}$. 这时, 在圆 $|z| < \frac{1}{16}$ 内, 恒有 $|F(z)| < k+3$.

**情形 2.2.2.2** 在圆 $|z| < \frac{1}{16}$ 内存在一点 $z_5$, 使 $\left|F^{(k+2)}(z_5)\right| = \frac{1}{2}$, 且当 $z \in \overline{z_4 z_5}$ 时, $\left|F^{(k+2)}(z_5)\right| \leqslant \frac{1}{2}$. 因此

$$\left|F^{(k+1)}(z_5)\right| \leqslant \left|F^{(k+1)}(z_4)\right| + \left|\int_{\overline{z_4 z_5}} F^{(k+2)}(z)\,\mathrm{d}z\right| < \frac{1}{8} + \frac{1}{16} < \frac{1}{4},$$

$$\left|F^{(k+1)}(z_5)\right| \geqslant \left|F^{(k+1)}(z_4)\right| - \left|\int_{\overline{z_4 z_5}} F^{(k+2)}(z)\,\mathrm{d}z\right| > \frac{1}{8} - \frac{1}{16} = \frac{1}{16},$$

并且还有

$$\left|F^{(k)}(z_5)\right| \leqslant \left|F^{(k)}(z_4)\right| + \left|\int_{\overline{z_4 z_5}} F^{(k+1)}(z)\,\mathrm{d}z\right| < \frac{1}{7} + \frac{1}{32} < \frac{1}{4},$$

$$|F(z_5)| < k+2.$$

再仿照情形 (2.2.1) 的讨论, 应用定理 1.6.2, 可得

$$\log^+ M\left(\frac{1}{16}, \frac{1}{F}\right) < K.$$

综合以上各种情形可知, 在圆 $\Delta\left(0, \frac{1}{64}\right)$ 内或者恒有 $|F(z)| < k$, 或者恒有 $\left|\frac{1}{F(z)}\right| < k$, 因而相应的 $f(z)$ 在圆 $\Delta\left(z_0, \frac{r}{64}\right)$ 内也具有此性质. 这就证明了定理 2.3.1. □

# 第 3 章 Bloch 原理及其应用

前面两章已经介绍了正规族的概念, 以及利用界囿定理证明了一些正规定则. 我们发现, 这些正规定则是建立在相应的 Picard 型定理的基础上的.

Bloch 曾经提出：相应于每一个 Picard 型定理, 必定存在一个正规定则, 具体的提法为：设 $P$ 是一个亚纯函数的性质. 若复平面上的亚纯函数 $f$ 在复平面上满足性质 $P$, 即 $\langle f, \mathbb{C}\rangle \in P$, 则必有 $f \equiv$ 常数. 那么对于区域 $D$ 上的亚纯函数族 $\mathcal{F}$, 它的每一个元素 $f$ 在区域 $D$ 上满足性质 $P$, 即 $\langle f, D\rangle \in P$, 则必在区域 $D$ 上正规.

我们将此称为 Bloch 原理. 虽然 Bloch 原理不是很精确, 但它对正规族理论的发展起了重要的推进作用.

## 3.1 Zalcman 引理

在这节中, 将对一些特殊的性质 $P$ 证明 Bloch 原理.

**引理 3.1.1** *设 $D \subset \mathbb{C}$ 为一个区域. $\mathcal{F}$ 为区域 $D$ 内的一个亚纯函数族, $-1 < \alpha < 1$. 若 $\mathcal{F}$ 在 $D$ 内不正规, 则存在*

*(1) 点列 $z_n \in D$, $|z_n| < r < 1$;*

*(2) 函数列 $f_n \in \mathcal{F}$;*

*(3) 正数列 $\rho_n \to 0^+$,*

*使得 $\left\{\dfrac{f_n(z_n+\rho_n\xi)}{\rho_n^{\alpha}}\right\}$ 在 $\mathbb{C}$ 上按球距内闭一致收敛于一个非常数的亚纯函数 $g(\xi)$, 并且*

$$g^{\#}(\xi) \leqslant g^{\#}(0) = 1.$$

**注** *$\alpha = 0$ 的情形是由 Zalcman[216] 证明的, 庞学诚 [146] 证明了 $-1 < \alpha < 1$ 的情形.*

**证明** 为简单起见, 只证 $\alpha = 0$ 的情形. $-1 < \alpha < 1$ 的情形可参照引理 3.1.3 的证明.

设 $\mathcal{F}$ 在 $z_0 \in D$ 不正规. 由 Marty 正规定则, 存在 $z_n^* \to z_0$, 函数列 $f_n \in \mathcal{F}$, 使得 $f_n^{\#}(z_n^*) \to \infty$. 不妨设 $D$ 为单位圆盘 $\Delta$, $|z_0| < r < 1$. 设

$$M_n = \max_{|z|\leqslant r}(r^2 - |z|^2), \quad f_n^{\#}(z) = (r^2 - |z_n|^2) f_n^{\#}(z_n).$$

那么由 $M_n \geqslant (r^2 - |z_n^*|^2) f_n^{\#}(z_n^*)$, 推得 $M_n \to \infty$. 令 $\rho_n = 1/f_n^{\#}(z_n)$, 可得 $\rho_n/(r - |z_n|) = (r + |z_n|)/M_n \leqslant 2/M_n \to 0$. 所以函数

$$g_n(\xi) = f_n(z_n + \rho_n \xi)$$

定义在 $|\xi| < R_n = (r - z_n)/\rho_n \to \infty$ 上. 又

$$g_n^{\#}(\xi) = \rho_n f_n^{\#}(z_n + \rho_n \xi) \leqslant \frac{r^2 - |z_n|^2}{r^2 - |z_n + \rho_n \xi|^2},$$

以及 $\{(r^2 - |z_n|^2)/(r^2 - |z_n + \rho_n \xi|^2)\}$ 在 $\mathbb{C}$ 上按球距内闭一致收敛于 1, 故

$$g^{\#}(\xi) \leqslant 1.$$

直接计算, $g^{\#}(0) = 1$. □

**注** 若 $\mathcal{F}$ 在点 $z_0$ 不正规, 可要求 $z_n \to z_0$. 我们将此留给读者自证.

**定理 3.1.1** 设 $-1 < \alpha < 1$, $P$ 是一个亚纯函数的性质, 满足

(1) 若 $\langle f, D \rangle \in P$, 则对于任意 $D' \subset D$ 有 $\langle f, D' \rangle \in P$;

(2) 若 $\langle f, D \rangle \in P$, $\varphi(z) = az + b$ $(a \neq 0)$, 则 $\langle \dfrac{f \circ \varphi}{a^\alpha}, \varphi^{-1}(D) \rangle \in P$;

(3) 假定 $\langle f_n, D_n \rangle \in P$, $D_1 \subset D_2 \subset D_3 \subset \cdots$, 以及 $\cup D_n \equiv \mathbb{C}$. 如果 $\{f_n\}$ 在 $\mathbb{C}$ 上按球距内闭一致收敛于亚纯函数 $f(z)$, 则 $\langle f, \mathbb{C} \rangle \in P$ 并且 $f \equiv$ 常数.

那么 $\mathcal{F} = \{f | \langle f, D \rangle \in P\}$ 在 $D$ 上正规. 此时也称 $P$ 是一个 Bloch 性质.

很明显, 定理 3.1.1 的证明可由引理 3.1.1 直接得到.

定理 3.1.1 是在对性质 $P$ 加了若干个附加条件的基础上证明了 Bloch 原理.

**例 3.1** 设 $P$ 是一个亚纯函数的性质, $\langle f, D \rangle \in P$ 的充要条件是 $f \neq 0, 1, \infty$. 容易验证 $P$ 满足性质 (1), (2) 和 (3). 从而由定理 3.1.1 得知, $P$ 是 Bloch 性质. 从而证明了 Montel 正规定则.

下面的引理是对零点均为重级函数来进行讨论的.

**引理 3.1.2** 设 $f$ 是单位圆盘 $\Delta$ 上的一个亚纯函数, 它的零点至少是 $k$ 级的, $-1 < \alpha \leqslant k$, $A \geqslant 1$. 如果满足

(1) 对于 $f$ 的任何一个零点 $z_0$, $|f^{(k)}(z_0)| \leqslant A$;

(2) 存在 $z^*$, $|z^*| < r < 1$ 使得

$$\frac{(1 - |z^*/r|^2)^{1+\alpha} |f'(z^*)|}{(1 - |z^*/r|^2)^{2\alpha} + |f(z^*)|^2} \geqslant kA + 1,$$

那么存在 $z_0 \in \Delta$, $0 < t < 1$ 使得

$$\sup_{|z|<1} \frac{(1 - |z/r|^2)^{1+\alpha} t^{1+\alpha} |f'(z)|}{(1 - |z/r|^2)^{2\alpha} t^{2\alpha} + |f(z)|^2} = \frac{(1 - |z_0/r|^2)^{1+\alpha} t^{1+\alpha} |f'(z_0)|}{(1 - |z_0/r|^2)^{2\alpha} t^{2\alpha} + |f(z_0)|^2} = kA + 1.$$

**证明** 设

$$F(z,t)=\frac{(1-|z/r|^2)^{1+\alpha}t^{1+\alpha}|f'(z)|}{(1-|z/r|^2)^{2\alpha}t^{2\alpha}+|f(z)|^2}.$$

那么 $F$ 在二元区域 $C=\{(z,t):|z|<r,0<t\leqslant 1\}$ 上是连续函数. 首先证明

$$\varlimsup_{(1-|z/r|^2)t\to 0}F(z,t)\leqslant\begin{cases}kA, & \alpha=k,\\ 0, & \alpha<k.\end{cases}\tag{3.1.1}$$

所以可设 $(1-|z_n/r|^2)t_n\to 0$, $|z_n|<r$, $0<t_n<1$ 以及 $z_n\to z_0$, $|z_0|\leqslant r$. 如果 $f(z_0)\neq 0$, 那么

$$\varlimsup_{n\to\infty}F(z_n,t_n)\leqslant\lim_{n\to\infty}\left(1-\left|\frac{z_n}{r}\right|^2\right)^{1+\alpha}t_n^{1+\alpha}\frac{|f'(z_n)|}{|f(z_n)|^2}=0.\tag{3.1.2}$$

假定 $f(z_0)=0$, 那么有

$$f(z_n)=a_\rho(z-z_0)^\rho(1+o(1)),$$
$$f'(z_n)=\rho a_\rho(z-z_0)^{\rho-1}(1+o(1)),$$

其中 $\rho\geqslant k$.

对于 $-1<\alpha<1$, 很明显地有

$$\varlimsup_{n\to\infty}F(z_n,t_n)\leqslant\varlimsup_{n\to\infty}\left(1-\left|\frac{z_n}{r}\right|^2\right)^{1-\alpha}t_n^{1-\alpha}|f'(z_n)|=0.$$

而对于 $1<\alpha\leqslant k$, 设

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(1-|z_n/r|^2)t_n}{|z_n-z_0|}=B,\tag{3.1.3}$$

其中 $0\leqslant B\leqslant\infty$ (这里 (3.1.3) 式的极限不一定存在, 我们可选取子列使 (3.1.3) 有意义). 如果 $B\geqslant 1$, 有

$$\begin{aligned}\varlimsup_{n\to\infty}F(z_n,t_n)&\leqslant\varlimsup_{n\to\infty}\left(1-\left|\frac{z_n}{r}\right|^2\right)^{1-\alpha}t_n^{1-\alpha}|f'(z_n)|\\&=\varlimsup_{n\to\infty}\frac{|\rho a_\rho(z_n-z_0)^{\rho-1}|}{(1-|z_n/r|^2)^{\alpha-1}t_n^{\alpha-1}}\\&=\varlimsup_{n\to\infty}\rho|a_\rho||z_n-z_0|^{\rho-\alpha}\frac{|z_n-z_0|^{\alpha-1}}{(1-|z_n/r|^2)^{\alpha-1}t_n^{\alpha-1}}\\&=\begin{cases}0, & \alpha<\rho,\\ [2mm]k|a_k|/B^{k-1}\leqslant kA, & \alpha=k=\rho.\end{cases}\end{aligned}\tag{3.1.4}$$

如果 $B \leqslant 1$, 则

$$F(z_n,t_n) \leqslant \frac{(1-|z_n/r|^2)^\alpha t_n^\alpha |f(z_n)|}{(1-|z_n/r|^2)^{2\alpha} t_n^{2\alpha} + |f(z_n)|^2} \cdot \left(1-\left|\frac{z_n}{r}\right|^2\right) t_n \frac{|f'(z_n)|}{|f(z_n)|}. \tag{3.1.5}$$

右式的第一个式子的上界 $\leqslant \dfrac{1}{2}$. 如果 $B \neq 0$, 那么对 $\alpha < \rho$

$$\begin{aligned}\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{(1-|z_n/r|^2)^\alpha t_n^\alpha |f(z_n)|}{(1-|z_n/r|^2)^{2\alpha} t_n^{2\alpha} + |f(z_n)|^2} &= \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{B^\alpha |z_n-z_0|^\alpha |a_\rho||z_n-z_0|^\rho}{B^{2\alpha}|z_n-z_0|^{2\alpha} + |a_\rho|^2|z_n-z_0|^{2\rho}} \\ &= \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{|a_\rho||z_n-z_0|^{\rho-\alpha}}{B^\alpha} \\ &= 0.\end{aligned} \tag{3.1.6}$$

另一方面,

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\left|\frac{z_n}{r}\right|^2\right) t_n \frac{|f'(z_n)|}{|f(z_n)|} = \overline{\lim_{n\to\infty}}\left(1-\left|\frac{z_n}{r}\right|^2\right) t_n \left|\frac{\rho}{z_n-z_0}\right| = B\rho. \tag{3.1.7}$$

由 (3.1.5), (3.1.6) 和 (3.1.7) 式得

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} F(z_n,t_n) \begin{cases} = 0, & \alpha < \rho, \\ \leqslant \dfrac{1}{2}Bk < kA, & \alpha = k = \rho. \end{cases} \tag{3.1.8}$$

这就证明了 (3.1.1) 式. 现在来证明引理. 给定 $F(z^*,1) > kA+1$. 设 $U = \{(z,t) \in \mathbb{C} : F(z,t) > kA+1\}$, 并设 $t_0 = \inf\{t : (z,t) \in U\}$. 不难得知 $0 < t_0 < 1$. 取 $z_0$, 使得 $(z_0,t_0) \in \overline{U}$. 再由 (3.1.1) 式有 $|z_0| < r$, 所以 $F(z_0,t_0) = kA+1$. □

**引理 3.1.3** *设 $\mathcal{F}$ 是单位圆内的一族亚纯函数, $\mathcal{F}$ 中的每个函数的零点的重级至少是 $k$, 并且*

(1) *若 $f(z)=0$, 必有 $|f^{(k)}(z)| \leqslant A$;*

(2) *$\mathcal{F}$ 在单位圆内不正规, 那么对于每一个 $\alpha$, $0 \leqslant \alpha \leqslant k$, 存在*

(a) *实数 $r$, $0<r<1$;*

(b) *点列 $z_n$, $|z_n|<r$;*

(c) *函数列 $f_n \in \mathcal{F}$;*

(d) *正数列 $\rho_n \to 0^+$ 使得函数 $\{\dfrac{f_n(z_n+\rho_n\xi)}{\rho_n^\alpha}\}$ 在 $\mathbb{C}$ 上按球距内闭一致收敛于一个亚纯函数 $g(\xi)$, 并且 $g^\#(\xi) \leqslant g^\#(0) = kA+1$.*

**证明** 因为 $\mathcal{F}$ 在 $\Delta$ 上不正规, 由 Marty 定理得知: 存在实数 $r^*$, $0<r^*<1$, 点列 $z_n^*$, $|z_n^*|<r^*$ 以及函数 $f_n \in \mathcal{F}$, $n=1,2,\cdots$, 使得

$$f_n^\#(z_n^*) = \frac{|f_n'(z_n^*)|}{1+|f_n(z_n^*)|^2} \to \infty.$$

固定 $r$, $0<r<r^*<1$. 因为

$$\frac{(1-|z_n^*/r|^2)^{1+\alpha}|f_n'(z_n^*)|}{(1-|z_n^*/r|^2)^{2\alpha}+|f_n(z_n^*)|^2}\geqslant\left(1-\left|\frac{z_n^*}{r}\right|^2\right)^{1+\alpha}\frac{|f_n'(z_n^*)|}{1+|f_n(z_n^*)|^2},\tag{3.1.9}$$

很明显不等式的左边趋于 $\infty$. 由引理 3.1.2, 存在 $z_n$ 和 $t_n$ 使得, $|z_n|<r$, $0<t_n<1$, 并且

$$\sup_{|z|<r}\frac{(1-|z/r|^2)^{1+\alpha}t_n^{1+\alpha}|f_n'(z)|}{(1-|z/r|^2)^{2\alpha}t_n^{2\alpha}+|f_n(z)|^2}=\frac{(1-|z_n/r|^2)^{1+\alpha}t_n^{1+\alpha}|f_n'(z_n)|}{(1-|z_n/r|^2)^{2\alpha}t_n^{2\alpha}+|f_n(z_n)|^2}=kA+1.\tag{3.1.10}$$

从而有

$$kA+1\geqslant\frac{(1-|z_n^*/r|^2)^{1+\alpha}t_n^{1+\alpha}|f_n'(z_n^*)|}{(1-|z_n^*/r|^2)^{2\alpha}t_n^{2\alpha}+|f_n(z_n^*)|^2}\geqslant t_n^{1+\alpha}\frac{(1-|z_n^*/r|^2)^{1+\alpha}|f_n'(z_n^*)|}{(1-|z_n^*/r|^2)^{2\alpha}+|f_n(z_n^*)|^2}.$$

由 (3.1.9) 式,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(1-|z_n^*/r|^2)^{1+\alpha}|f_n'(z_n^*)|}{(1-|z_n^*/r|^2)^{2\alpha}+|f_n(z_n^*)|^2}=+\infty,$$

所以有 $\lim\limits_{n\to\infty}t_n=0$. 设 $\rho_n=(1-|z_n/r|^2)t_n$, 那么

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\rho_n}{r-|z_n|}=0.\tag{3.1.11}$$

从而我们得知, 函数 $g_n(\xi)=f_n(z_n+\rho_n\xi)/\rho_n^\alpha$ 在区域 $|\xi|<R_n$ 上有定义, 其中 $R_n=(r-|z_n|)/\rho_n\to\infty$. 经简单计算可知

$$\frac{|g_n'(\xi)|}{1+|g_n(\xi)|^2}=\frac{(1-|z_n/r|^2)^{1+\alpha}t_n^{1+\alpha}|f_n'(z_n+\rho_n\xi)|}{(1-|z_n/r\|^2)^{2\alpha}t_n^{2\alpha}+|f_n(z_n+\rho_n\xi)|^2},\tag{3.1.12}$$

再由 (3.1.10) 就得到

$$g_n^{\#}(0)=\frac{|g_n'(0)|}{1+|g_n(0)|^2}=kA+1.\tag{3.1.13}$$

对于 $|\xi|\leqslant R<R_n$, 可得

$$|z_n|^2-2\rho_nR-\rho_n^2R^2\leqslant|z_n+\rho_n\xi|^2\leqslant|z_n|^2+2\rho_nR+\rho_n^2R^2,$$

在任意的紧子集上成立. 现固定 $\varepsilon>0$, 当 $n$ 充分大时, 由 (3.1.10) 式得

$$\begin{aligned}g_n^{\#}(\xi)&\leqslant(1+\varepsilon)\frac{(1-|(z_n+\rho_n\xi)/r|^2)^{1+\alpha}t_n^{1+\alpha}|f_n'(z_n+\rho_n\xi)|}{(1-|(z_n+\rho_n\xi)/r|^2)^{2\alpha}t_n^{2\alpha}+|f_n(z_n+\rho_n\xi)|^2}\\&\leqslant(1+\varepsilon)(kA+1).\end{aligned}\tag{3.1.14}$$

由 Marty 正规定则, $\{g_n\}$ 在复平面 $\mathbb{C}$ 上正规. 不妨假设 $\{g_n\}$ 在 $\mathbb{C}$ 上按球距内闭一致收敛于亚纯函数 $g$. 由 (1.1.13) 和 (1.1.14) 式得

$$g^{\#}(\xi) \leqslant g^{\#}(0) = kA + 1. \qquad \square$$

**注** 以色列数学家 Zalcman [216] 证明了 $\alpha = 0$ 的情形; 庞学诚 [147] 证明了 $-1 < \alpha < 1$ 的情形. 这两种情形对零点不作任何要求. 陈怀惠, 顾永兴 [48] 在零点重级 $\geqslant k$ 的情况下, 证明了 $-1 < \alpha < k$ 的情形. 这里我们指出条件 $A \geqslant 1$ 不是本质的, 仅是为了叙述上的方便.

## 3.2 Zalcman 引理的应用

**定理 2.3.1 的证明** 不妨设 $D$ 为单位圆盘 $\Delta$. 因为 $\mathcal{F}$ 中的函数均不取零点, 所以它们的零点的级为无穷大. 若 $\mathcal{F}$ 在区域 $\Delta$ 上不正规, 由引理 3.1.3, 存在

(1) 正数 $r$, $0 < r < 1$;

(2) 复数列 $z_n$, $|z_n| < r$, $n = 1, 2, \cdots$;

(3) 正数列 $\rho_n$, $\rho_n \to 0^+$;

(4) 函数列 $f_n \in \mathcal{F}$, $n = 1, 2, \cdots$

使得 $\{g_n(\xi)\}$ 在复平面 $\mathbb{C}$ 上按球距内闭一致收敛于亚纯函数 $g(\xi)$, 其中

$$g_n(\xi) = \frac{f_n(z_n + \rho_n \xi)}{\rho_n^k},$$

并且 $g^{\#}(\xi) \leqslant g^{\#}(0) = 1$.

因为 $f_n \neq 0$, $f_n^{(k)} \neq 1$, 那么 $g_n \neq 0$, $g_n^{(k)} \neq 1$. 由 Hurwitz 定理, $g \neq 0$ (因为 $g \neq$ 常数). 下面证明 $g^{(k)} \neq 1$.

若不然, 存在 $\xi_0$, $g^{(k)}(\xi_0) = 1$. 由 Hurwitz 定理, 不难得到 $g^{(k)}(\xi) \equiv 1$. 那么 $g(\xi)$ 是一个 $k$ 次多项式, 所以 $g(\xi)$ 有零点, 矛盾.

这样就得到 $g \neq 0$, $g^{(k)} \neq 1$. 由定理 1.6.2(Hayman 不等式) 的推论, $g$ 为常数, 这与 $g^{\#}(0) = 1$ 矛盾.

**定理 2.3.3 的证明** 不妨设 $D$ 为单位圆盘 $\Delta$. 若 $\mathcal{F}$ 在点 $z_0$ 上不正规, 如同定理 2.3.1 的证明, 存在 $z_n$, $\rho_n$ 以及 $f_n$ 使得

$$g_n(\xi) = \frac{f_n(z_n + \rho_n \xi)}{\rho_n^{\frac{1}{k+1}}}$$

在复平面 $\mathbb{C}$ 上按球距内闭一致收敛于亚纯函数 $g(\xi)$, 且 $g^{\#}(\xi) \leqslant g^{\#}(0) = 1$.

断言: $g^k g' \neq a$. 事实上, 若存在点 $\xi_0$, 使得 $g^k(\xi_0) g'(\xi_0) = a$, 但是

$$g^k(\xi)g'(\xi) = f_n^k(z_n + \rho_n\xi)f_n'(z_n + \rho_n\xi) \neq a,$$

所以由 Hurwitz 定理,

$$g^k(\xi)g'(\xi) \equiv a,$$

从而有

$$g^{k+1}(\xi) = (k+1)(a\xi + c).$$

这与 $g(\xi)$ 是平面上的一个亚纯函数矛盾.

由此推得 $g^k g' \neq a$. 由文献 [26] 的定理 2 得 $g \equiv$ 常数, 这与 $g^{\#}(0) = 1$ 矛盾.

**定理 2.3.5 的证明**　假设 $D$ 为单位圆盘 $\Delta$. 若 $\mathcal{F}$ 在区域 $\Delta$ 上不正规, 由引理 3.1.1, 存在

(1) 正数 $r$, $0 < r < 1$;

(2) 复数列 $z_n$, $|z_n| < r$, $n = 1, 2, \cdots$;

(3) 正数列 $\rho_n$, $\rho_n \to 0^+$;

(4) 函数列 $f_n \in \mathcal{F}$, $n = 1, 2, \cdots$, 使得 $\{g_n(\xi)\}$ 在复平面 $\mathbb{C}$ 上按球距内闭一致收敛于亚纯函数 $g(\xi)$. 其中 $g_n(\xi) = \rho_n^{\alpha} f_n(z_n + \rho_n\xi)$, $\alpha = \dfrac{1}{k-1}$, 且 $g^{\#}(\xi) \leqslant g^{\#}(0) = 1$.

因为

$$g_n'(\xi) - g_n^k(\xi) = \rho_n^{\frac{k}{k-1}}(f_n'(z_n + \rho_n\xi) - f_n^k(z_n + \rho_n\xi)) \neq \rho_n^{\frac{k}{k-1}} a,$$

所以由 $\rho_n^{\frac{k}{k-1}} a \to 0$ 与 Hurwitz 定理, 得

$$g'(\xi) - g^k(\xi) \equiv 0, \tag{3.2.1}$$

或

$$g'(\xi) - g^k(\xi) \neq 0, \tag{3.2.2}$$

由 (3.2.1) 式得

$$\frac{1}{k-1}\frac{1}{g^{k-1}} = -z + C.$$

因为 $k \geqslant 3$, 所以 $g$ 不是单值的亚纯函数, 矛盾.

再由 (3.2.2) 式, 得

$$\left(\frac{1}{g^{k-1}}\right) \neq -(k-1).$$

令 $f = 1/g$, 得

$$f^{k-2}f' \neq 1,$$

矛盾.

**定理 3.2.1** 设 $\mathcal{F}$ 为区域 $D$ 上的一族亚纯函数, $k$ 为一个正整数, $b(\neq 0)$ 为有限复数, $h$ 为有穷正数. 如果对于任意 $f\in\mathcal{F}$, $f$ 的零点重级 $\geqslant k$, 且满足:

(1) $\overline{E}_f(0)=\overline{E}_{f^{(k)}}(b)$;

(2) 对任意 $f$ 的零点, $0<|f^{(k+1)}(z)|<h$,

那么 $\mathcal{F}$ 在区域 $D$ 上正规.

这里, $\overline{E}_f(a)=\{z\in D: f(z)=a\}$.

**注** 当 $\overline{E}_f(0)=\emptyset$ 时, 有 $f(z)\neq 0$, $f^{(k)}(z)\neq b$. 这就表明定理 3.2.1 是该定理的推论.

下面的一个例子说明条件 (2): $0<|f^{(k+1)}(z)|<h$ 是不能省略的.

**例 3.2** 设 $f_n(z)=\dfrac{1}{n^2}(\mathrm{e}^{nz}+\mathrm{e}^{-nz}-2)$, 则 $f_n$ 的零点均是重级, $\overline{E}_f(0)=\overline{E}_f''(2)\subset\overline{E}_f'''(0)$, 显然 $\{f_n(z)\}$ 在单位圆盘上不正规.

**定理 3.2.1 的证明** 不妨设 $h>|b|+1$, $D$ 为单位圆盘 $\Delta$. 如果 $\mathcal{F}$ 在 $\Delta$ 上不正规. 由引理 3.1.3, 存在 $f_n\in\mathcal{F}$, $z_n\in\Delta$ 以及正数列 $\rho_n\to 0^+$, 使得 $\{g_n(\xi)\}$ 在复平面 $\mathbb{C}$ 上按球距内闭一致收敛于 $g(\xi)$, $g^{\#}(\xi)\leqslant g^{\#}(0)=kh+1$. 其中 $g_n(\xi)=f_n(z_n+\rho_n\xi)/\rho_n^k$.

我们证明:

(1) $g$ 的零点重级至少为 $k$;

(2) $\overline{E}_g(0)=\overline{E}_{g^{(k)}}(b)\subset\overline{E}_{g^{(k+1)}}(0)$.

事实上, 设 $g(\xi_0)=0$, 那么由 Hurwitz 定理, 存在 $\xi_n$, $\xi_n\to\xi_0$, 当 $n$ 充分大时, 有

$$0=g_n(\xi_n)=\frac{f_n(z_n+\rho_n\xi_n)}{\rho_n^k}.$$

从而得 $f_n(z_n+\rho_n\xi_n)=0$. 由定理的条件有

$$f_n^{(j)}(z_n+\rho_n\xi_n)=0,\quad j=0,1,\cdots,k-1;$$

$$|f_n^{(k+1)}(z_n+\rho_n\xi_n)|\leqslant h$$

以及 $f_n^{(k)}(z_n+\rho_n\xi_n)=b$. 所以

$$g_n^{(j)}(\xi_n)=0;$$
$$g_n^{(k)}(\xi_n)=b,$$

从而

$$g^{(j)}(\xi_0)=\lim_{n\to\infty}g_n^{(j)}(\xi_n)=0,\quad j=0,1,2,\cdots,k-1.$$

$$g^{(k)}(\xi_0)=\lim_{n\to\infty}g_n^{(k)}(\xi_n)=b,$$

$$g^{(k+1)}(\xi_0) = \lim_{n\to\infty} \rho_n f_n^{(k+1)}(z_n + \rho_n \xi_n) = 0,$$

从而有

$$\overline{E}_g(0) \subset \overline{E}_{g^{(k)}}(b) \subset \overline{E}_{g^{(k+1)}}(0).$$

反之, 设 $g^{(k)}(\xi_1) = b$. 首先我们有 $g^{(k)}(\xi) \not\equiv b$. 事实上, 若 $g^{(k)}(\xi) \equiv b$, 则 $g$ 为一 $k$ 阶多项式. 因为 $g$ 的零点的重级为 $k$, 所以 $g(\xi) = b(\xi - \xi_1)^k/k!$. 由简单计算得

$$g^{\#}(0) \leqslant \begin{cases} k/2, & |\xi_1| \geqslant 1, \\ |b|, & |\xi_1| < 1, \end{cases} \tag{3.2.3}$$

从而有 $g^{\#}(0) < k(|b|+1)+1$, 矛盾.

另外, 因 $g^{(k)}(\xi_0) = b$ 且 $g^{(k)} \not\equiv b$, 故存在 $\xi_n, \xi_n \to \xi_0$, 当 $n$ 充分大时, 有

$$f_n^{(k)}(z_n + \rho_n \xi_n) = g_n^{(k)}(\xi_n) = b.$$

再根据定理条件就有

$$g_n(\xi_n) = f_n(z_n + \rho_n \xi_n)/\rho_n^k = 0$$

及

$$|g_n^{(k+1)}(\xi_n)| = \rho_n |f_n^{(k+1)}(z_n + \rho_n \xi_n)| < \rho_n h.$$

令 $n \to \infty$, 就得 $g(\xi_0) = 0$ 和 $g^{(k+1)}(\xi_0) = 0$, 这就完成了 (2) 的证明.

下面利用 $g$ 所满足的条件 (1) 和 (2) 来导出矛盾. 若 $\overline{E}_g(0) = \varnothing$, 则 $\overline{E}_{g^{(k)}}(b) = \emptyset$. 故由定理 1.6.2(Hayman 不等式) 的推论, 得 $g$ 为常函数, 矛盾. 所以存在 $\xi_0$, $g(\xi_0) = 0$, $g^{(k)}(\xi_0) = b$, $g^{(k+1)}(\xi_0) = 0$. 由此 $\xi_0$ 是 $g^{(k)} - b$ 的重级零点, 所以由辐角原理, 存在两个序列 $\{\xi_n^1\}$, $\{\xi_n^2\}$, 使得 $\lim\limits_{n\to\infty} \xi_n^i = \xi_0$, $i = 1, 2$. 并且

$$g_n^{(k)}(\xi_n^1) = g_n^{(k)}(\xi_n^2) = b,$$

所以由条件知

$$\begin{aligned} &g_n(\xi_n^1) = g_n(\xi_n^2) = 0, \\ &g_n'(\xi_n^1) = g_n'(\xi_n^2) = 0, \\ &\cdots\cdots \\ &g_n^{(k-1)}(\xi_n^1) = g_n^{(k-1)}(\xi_n^2) = 0, \end{aligned}$$

从而可得 $\xi_0$ 是 $g$ 的 $2k$ 级零点, 矛盾. □

## 3.3 Bergweiler-Eremenko 定理

为了更好地叙述 Bergweiler-Eremenko[26] 定理. 我们首先引进一些概念.

设 $f:\mathbb{C}\to\overline{\mathbb{C}}=\mathbb{C}\cup\{\infty\}$ 为亚纯函数. 取 $a\in\mathbb{C}$, $\Delta(a,r)=\{z:|z-a|<r\}$. 对任意 $r>0$, $f^{-1}(\Delta(a,r))$ 的一个连通分支 $U(r)$, 使得当 $r_1<r_2$ 时, $U(r_1)\subset U(r_2)$. 则

(1) $\bigcap\limits_{r>0}U(r)=\{z\}$. 如 $a=f(z)$, 且 $f'(z)\neq 0$, 那么 $f(z)$ 在 $U(r)$ 上单叶 ($r$ 充分小). 若 $a=f(z)$, 且 $f'(z)=0$, 称 $z$ 是 $f(z)$ 的一个临界点, 称 $a$ 为 $f(z)$ 的一个临界值.

(2) $\bigcap\limits_{r>0}U(r)=\varnothing$. 很明显, $a$ 是 $f(z)$ 的一个渐近值.

**定义 3.3.1** *设 $a$ 为 $f(z)$ 的一个渐近值. 如果存在 $r>0$, 使得当 $z\in U(r)$ 时, $f'(z)\neq a$, 称 $a$ 为 $f(z)$ 的一个直接渐近值. 若不是直接渐近值, 就称为非直接渐近值.*

**引理 3.3.1** *设 $p(>3)$ 为一个正整数, $g$ 为平面上的一个亚纯函数, 级 $\rho_g\leqslant p-3$. 则存在一个整数 $n_0$ 以及实数列 $R_n\in(2^{pn-2},2^{pn})$ $(n\geqslant n_0)$, 使得位于闭域 $\overline{\Delta(0,2^n)}$ 中的阶层曲线 $g(z)=R_n$ 的长度至多为 $2^{pn/2}$.*

**证明** 不妨设 $g(0)\neq\infty$. 取 $R>|g(0)|+1$, 则由定理 1.2.1(Nevanlinna 第一定理)

$$n\left(2^n,\frac{1}{g-Re^{i\theta}}\right)\leqslant N\left(2^{n+2},\frac{1}{g-Re^{i\theta}}\right)\leqslant T(2^{n+2},g)+\log^+R+c.$$

定义

$$p_n(R)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}n\left(2^n,\frac{1}{g-Re^{i\theta}}\right)d\theta$$

所以

$$p_n(R)\leqslant T(2^{n+2},g)+\log^+R+c. \tag{3.3.1}$$

设 $l_n(R)$ 是位于 $\overline{\Delta(0,2^n)}$ 中的阶层曲线 $g(z)=R$ 的总长度, $\beta_n=2^{pn}$, $\alpha_n=2^{pn-2}$. 由长度面积不等式 [97], 有

$$\int_{\alpha_n}^{\beta_n}\frac{l_n^2(R)dR}{Rp_n(R)}\leqslant 2\pi|\overline{\Delta(0,2^n)}|=2\pi^2 2^{2n},$$

其中 $|\overline{\Delta(0,2^n)}|$ 表示该区域的面积. 所以存在 $R_n\in(\alpha_n,\beta_n)$, 使得

$$l_n^2(R_n)\leqslant\frac{1}{\beta_n-\alpha_n}R_np_n(R_n)2\pi^2 2^{2n}.$$

由于 $T(2^{n+2},g)\leqslant(2^{n+2})^{p-3}=2^{(n+2)(p-3)}$, 所以由 (3.3.1) 式得

$$l_n(R_n)\leqslant 2^{pn/2}.$$

□

**引理 3.3.2** 设 $p(>3)$ 为一个正整数, $f$ 为一个级小于 $p-3$ 的亚纯函数. 对于任意正数 $\varepsilon>0$, 存在 $C>0$ 使得开集

$$E=\{z:|f'(z)|<C^{-1}|z|^{-2p}\}$$

中的每个分量 $B$ 的直径

$$\mathrm{diam}(B)<\varepsilon.$$

**证明** 易知 $1/f'$ 与 $f$ 有相同的级. 因为

$$\sum_{n=n_0}^{\infty}\frac{2^{np/2}+2\pi 2^n}{R_n}$$

收敛, 所以对任意正数 $\varepsilon$, 可取充分大 $n_0$, 使得

$$\sum_{n=n_0}^{\infty}\frac{2^{np/2}+2\pi 2^n}{R_n}<\frac{\varepsilon}{2}, \tag{3.3.2}$$

那么

$$\sum_{n=n_0}^{\infty}\frac{2^{n+1}}{R_n}<\frac{\varepsilon}{2}.$$

当 $n\geqslant n_0$ 时, 设 $V_n=\{z:|z|<2^n,|g(z)|>R_n\}$, 和 $g=1/f'$,

$$V=\bigcup_{n=n_0}^{\infty}V_n.$$

因为 $V$ 的边界是由位于 $K_n$ 的阶层曲线 $|g(z)|=R_n$ 和 $|z|=2^n$ 上的部分圆弧所构成. 在这些圆弧上满足 $R_n\leqslant|g(z)|\leqslant R_{n+1}$. 由引理 3.3.1 和 (3.3.2) 式就有

$$\int_{\partial V}|g(z)|^{-1}|\mathrm{d}z|\leqslant\sum_{n=n_0}^{\infty}\frac{2^{np/2}+2\pi 2^n}{R_n}<\frac{\varepsilon}{2}.$$

不失一般性, 假定 $g$ 在圆周 $|z|=2^{n_0}$ 上无极点. 取 $C>1$ 并且在 $|z|=2^{n_0}$ 上, $|g(z)/z^{2p}|\leqslant C$. 设 $E=\{z:|g(z)|>C|z|^{2p}\}$. 适当放大 $C$, 使 $E$ 在圆盘 $|z|<2^{n_0}$ 内的所有连通分支的直径小于 $\varepsilon$. 下面考虑 $E$ 在 $|z|>2^{n_0}$ 上的连通分支的情形即可. 对于 $z\in E$, $|z|>2^{n_0}$, 存在 $n>n_0$, 使得 $2^{n-1}\leqslant|z|<2^n$, 那么 $|g(z)|>C|z|^{2p}\geqslant C2^{(n-1)p}\geqslant R_n$, 所以 $z\in V_n\subset V$.

设 $D$ 是 $V$ 的一个分量, 它含有 $E$ 的一个分量 $B$, $B\subset\{z:|z|>2^{n_0}\}$. 再设 $z_1$, $z_2\in B$, $L$ 是连接 $z_1$, $z_2$ 的直线段. 若 $L\subset B$, 取 $\gamma=L$. 如果 $L\not\subset B$, 那么存在 $a$, $b$ 为端点的线段 $[a,b]\subset L$, 使得 $(a,b)\subset\mathbb{C}\backslash D$, $a$, $b\in\partial D$, 由 $\partial D$ 上的连接 $a$, $b$ 的有

界弧段替代 $(a,b)$. 经过这样有限次替换后得到了一条曲线 $\gamma$. 很明显, 在 $\gamma$ 上均有 $|g| \geqslant R_n$. 设 $T_n$ 是所有这些线段 (位于 $2^{n-1} \leqslant |z| \leqslant 2^n$ ) 的并集, 故

$$|f(z_1)-f(z_2)| \leqslant \int_\gamma |g(z)|^{-1}|\mathrm{d}z| < \frac{\varepsilon}{2} + \sum_{n=n_0}^{\infty} \int_{T_n} |g(z)|^{-1}||\mathrm{d}z|$$

$$\leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{2^{n+1}}{R_n} < \varepsilon. \qquad \square$$

**定理 3.3.1**(Bergweiler-Eremenko) *设 $f$ 为复平面上的有穷级亚纯函数, 对于 $f$ 的每一个非直接渐近值 $a$, 存在 $z_n$, $f(z_n) \to a$, $f'(z_n) = 0$.*

**证明** 设 $a$ 是 $f(z)$ 的一个非直接渐近值, 取充分小的 $R_0$, 使得 $0 \notin U(R_0)$, 并且 $f'(z) \neq 0$, $z \in U(R_0)$. 不妨设 $a=0$. 我们构造:

(1) 一列渐近值 $\{a_n\}$, $R_0/2 > |a_1| > |a_2| > \cdots$;

(2) 一列互不相交的区域 $\{G_n\}$, $G_n \subset U(R_0/2)$, 并使 $f$ 在 $G_n$ 上单叶, $D_n = f(G_n)$ 是一个圆盘, $0 \notin \overline{D_n}$;

(3) 渐近值曲线 $\{\Gamma_n\}$, $\Gamma_n \subset G_n$, $f(\Gamma_n)$ 是一条直线段, 并且 $f(z) \to a_n$, $z \to \infty$, $z \in \Gamma_n$.

假定 $a_{n-1}, G_{n-1}, \Gamma_{n-1}$ 已经存在, 现构造 $a_n, G_n, \Gamma_n$. 因为 $0 \notin \overline{D}_k = \overline{f(G_k)}$, 所以可取 $R_n < |a_{n-1}|$ (若 $n=1$, 取 $R_1 < \dfrac{R_0}{2}$ ), 使得 $U(R_n) \cap G_k = \varnothing$ $(k<n)$. 因为 $a=0$ 是 $f$ 的非直接渐近值, 所以存在 $z_n \in U(R_n)$, $f(z_n)=0$. 由假设, $f'(z_n) \neq 0$. 所以 $f$ 在点 $z_n$ 局部单叶. 设其反函数在点 $w_n = f(z_n) = 0$ 幂级数为

$$\varphi(w) = z_n + \sum_{m=1}^{\infty} c_m w^m, \tag{3.3.3}$$

它的收敛半径为 $r_n$. 我们断言: $0 < r_n < R_n$.

设 $r_n \geqslant R_n$, 则 $A = \varphi(\Delta(0,R_n))$ 是 $f^{-1}(\Delta(0,R_n))$ 的一个分量, $z_n \in \phi(\Delta(0,R_n))$. 因为 $U(R_n)$ 是连通的, 所以 $A = U(R_n)$. 这样就得到 $f$ 在 $U(R_n)$ 上单叶, 矛盾.

设 $a_n = r_n \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ 是 $\varphi$ 的一个奇点, 则 $|a_n| = r_n < R_n < |a_{n-1}| < R_{n-1} < \cdots < \dfrac{R_0}{2}$. 因为 $\varphi$ 在圆盘

$$D_n = \left\{ w : |w - \frac{2r_n}{3}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}| < \frac{r_n}{3} \right\}$$

上全纯, 边界上仅有唯一的一个奇点 $a_n = r_n\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$. 由 $D$ 的构造易知 $0 \notin \overline{D}_n$. 设 $G_n = \varphi(D_n)$, 则 $G_n$ 是无界的单连通区域. 事实上, 若 $G_n$ 是有界区域, $\varphi$ 可连续到边界上, 所以 $z^\star = \varphi(a_n) \in \mathbb{C}$, 那么 $\varphi$ 在 $a_n$ 点解析. 这就是说 $z^\star \in U(R_n) \subset U(r_0)$

不是 $f(z)$ 的临界点 (即 $a_n$ 不是 $f(z)$ 的一个临界值), 矛盾. 又 $G_n \subset U(R_n)$, 从而 $G_n \cap G_k = \varnothing$ $(k < n)$. 最后设线段

$$L_n = \{w = t\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} : \frac{2}{3}r_n \leqslant t < r_n\} \subset D_n,$$
$$\Gamma_n = \varphi(L_n).$$

这就完成了 (1), (2) 和 (3) 的存在性证明.

因为在 $U(R_0)$ 上, $f'(z) \neq 0$, 所以 $a_n$ 是 $f(z)$ 的一个渐近值. 易得, 沿着 $\Gamma_n$ 趋于 $\infty$ 时, $f(z) \to a_n$. 设 $z_n \in G_n$, $z_n = |q_n|$. 当 $x > x_n$ 时, 用 $\theta_n(x)$ 表示集合 $\{\theta : x\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} \in G_n\}$ 的 (角) 测度, 则

$$\sum_{n=1}^{\infty} \theta_n(x) \leqslant 2\pi$$

由 Ahlfors 定理 [2], 对于函数 $f : G_n \to D_n$ 有

$$\log \frac{1}{|f(z) - a_n|} \geqslant \pi \int_{x_n}^{|z|} \frac{\mathrm{d}x}{x\theta_n(x)} - c_n, z \in \Gamma_n, \tag{3.3.4}$$

其中 $c_n$ 是常数. 由上式我们可以判定: 对所有的 $n$, 除去至多 $4p+2$ 个外, 均有

$$\lim_{z\to\infty} \inf_{z\in\Gamma_n} |f(z) - a_n||z|^{2p+1} = 0, \tag{3.3.5}$$

其中 $p(> 3)$ 是一个正整数, $\rho_f < p - 3$. 不然, 存在 $C > 0$, 对充分大的 $|z|$,

$$|f(z) - a_n| > C|z|^{-2p-1}$$

$n = 1, 2, \cdots, 4p+3$, $|z| \geqslant x_0 = \max\{x_n : 1 \leqslant n \leqslant 4p+3\}$. 由 (3.3.4) 式

$$\pi \int_{x_0}^{|z|} \frac{\mathrm{d}x}{x\theta_n(x)} \leqslant (2p+1)\log|z| + O(1), \quad 1 \leqslant n \leqslant k.$$

再由施瓦兹不等式

$$\begin{aligned}\left(\log\frac{|z|}{x_0}\right)^2 &= \left(\int_{x_0}^{|z|} \frac{\mathrm{d}x}{x}\right)^2 \leqslant \left(\int_{x_0}^{|z|} \frac{\mathrm{d}x}{x\theta_n(x)}\right)\left(\int_{x_0}^{|z|} \frac{\theta_n(x)}{x}\mathrm{d}x\right) \\ &\leqslant \left(\frac{1}{\pi}(2p+1)\log|z| + O(1)\right)\left(\int_{x_0}^{|z|} \frac{\theta_n(x)}{x}\mathrm{d}x\right).\end{aligned}$$

由于 $\theta_1(x) + \theta_2(x) + \cdots + \theta_{4p+3}(x) \leqslant 2\pi$, 则

$$(4p+3)\left(\log\frac{|z|}{x_0}\right) \leqslant [(4p+2)\log|z| + O(1)]\log\frac{|z|}{x_0}.$$

当 $|z|$ 充分大时就得到矛盾.

不妨假设 (3.3.5) 式对所有的 $n$ 成立. 下面证明: 对每一个 $n$, 存在序列 $\{z_{n,j}\} \subset \Gamma_n$, $z_{n,j} \to \infty$ $(j \to \infty)$, 使得

$$|f'(z_{n,j})| \leqslant |z_{n,j}|^{-2p-1}. \tag{3.3.6}$$

注意到 $f$ 将 $\Gamma_n$ 映射为直线段, 则当 $z$ 充分大时

$$|f_n(z) - a_n| = \int_z^\infty |f'(z)||\mathrm{d}z|, \tag{3.3.7}$$

这里积分路径为 $\Gamma$. 若 (3.3.6) 式不成立, 那么

$$|f'(z)| > |z|^{-2p-1}$$

对 (模) 充分大的 $z \in \Gamma_n$ 成立. 那么由 (3.3.7) 式得到

$$|f(z) - a_n| \geqslant \int_z^\infty |z|^{-2p-1}|\mathrm{d}z| \geqslant \frac{1}{2p}|z|^{-2p},$$

这与 (3.3.4) 式矛盾. 这就证明了 (3.3.6) 式成立.

因为 $R_0/2 > |a_1| > |a_2| > \cdots$, 那么若设

$$\varepsilon = \frac{1}{4}\min\{|a_i - a_j| : 1 \leqslant i < j \leqslant 2p\},$$

则有 $\varepsilon < R_0/8$. 由引理 3.3.2, 对上述的 $\varepsilon$, 存在 $C > 0$, 使得 $E = \{z : |f'(z)| < C^{-1}|z|^{-2p}\}$ 的某一个连通分支 $B$ 均满足

$$\mathrm{diam}(f(B)) < \varepsilon.$$

对于每一个 $n$, 取 $z_n^\star$, 使得

$$|f'(z_n^\star)| \leqslant |z_n^\star|^{-2p-1}, \tag{3.3.8}$$

$$|z_n^\star| \geqslant C, \tag{3.3.9}$$

以及

$$|f(z_n^\star) - a_n| < \varepsilon, \quad 1 \leqslant n \leqslant 2p.$$

由此

$$|f(z_n^\star) - f(z_k^\star)| > 2\varepsilon, \quad 1 \leqslant n < k \leqslant 2p, \tag{3.3.10}$$

以及

$$|f(z_n^\star)| + \varepsilon < \frac{3}{4}R_0, \quad 1 \leqslant n \leqslant 2p. \tag{3.3.11}$$

由 (3.3.8) 式和 (3.3.9) 式推得

$$|f'(z_n^\star)| < C^{-1}|z_n^\star|^{-2p}, \quad 1 \leqslant n \leqslant 2p. \tag{3.3.12}$$

设 $B_n$ 是 $E$ 中的包含 $z_n^\star$ 的那个连通分支, 由引理 3.3.2 和 (3.3.11) 式, $f(B_n) \subset \{w : |w| < \frac{3}{4}R_0\}$. 但是 $U(R_0)$ 是 $f^{-1}(\{w : |w| < R_0\})$ 的一个连通分支, $U(R_0)$ 和 $B_n$ 均包含 $z_n^\star$, 所以

$$\overline{B}_n \subset U(R_0), \quad 1 \leqslant n \leqslant 2p.$$

由引理 3.3.2 和 (3.3.10) 式得 $B_n$ 是互不相交的.

因此在 $U(R_0)$ 上, $f'(z) \neq 0$, 所以函数

$$u(z) = -\log|f'(z)| - 2p\log|z| - \log C$$

是 $U(R_0)$ 上的次调和函数. 在 $B_n$ 上, $u(z) > 0$. 在 $\partial B_n$ 上, $u(z) = 0$. 这就是说, $B_n$ 恰为 $\{z \in U(R_0) : u(z) > 0\}$ 的一个连通分支. 由 Denjoy-Carelman-Ahlfors 定理 [98], 可得 $f'(z)$ 的级 (也就是 $f(z)$ 的级) 至少为 $p$, 矛盾. 定理证完. □

由定理 3.3.1, 可得下面一个有用的推论:

**推论** *设 $f$ 是复平面上 $\rho(<\infty)$ 级亚纯函数, 如果 $f$ 只有有限个临界值, 那么 $f$ 的渐近值的个数不超过 $2\rho$.*

**引理 3.3.3** *设 $f \in B$ 是复平面上的一个非常数的亚纯函数, 它的有限临界值是一个有界集合. 如果 $R$ 是临界值集合的一个上界, 则每一个 $f^{-1}(D_R)$ 的分量是复平面的单连通区域, 其中 $D_R = \{w : |w| > R\}$.*

**证明** 设 $V$ 是 $f^{-1}(D_R)$ 的一个分量, 而 $g$ 是 $f^{-1}$ 的一个分支, $g(D_R) \subset V$. 设 $h(t) = g(\mathrm{e}^t)$, $t \in H = \{t : \mathrm{Re}t > \log R\}$. 因为 $H$ 是单连通区域, 由单值性定理, $h(t)$ 是 $H$ 上的单值解析函数. 分两种情形讨论:

**情形 1** $h$ 是单叶解析函数, 则 $V = h(H)$, 从而 $V$ 是单连通区域.

**情形 2** 若 $h$ 不是单叶函数, 则存在最小正整数 $m$, 以及 $t_0 \in H$, 使得

$$h(t_0) = h(t_0 + 2m\pi\mathrm{i}).$$

当 $|t - t_0|$ 充分小时, $h(t) - t_0 - 2m\pi\mathrm{i}$ 也充分的小. 所以存在 $t'$,

$$h(t) = h(t').$$

因为 $t' \in h^{-1}(h(t)) = \{t + 2k\pi j | j = 1, 2, \cdots\}$, 所以 $t' = t + 2m\pi\mathrm{i}$, 由此得到 $h(t) = h(t + 2m\pi\mathrm{i})$, 即 $h(t)$ 是以 $2\pi m\mathrm{i}$ 为周期的周期函数. 从而存在区域 $\{\rho : |\rho| > R^{\frac{1}{m}}\}$ 上的单叶函数

$$\varphi(\rho) = a_1\rho + a_0 + a_{-1}\rho^{-1} + \cdots$$

使得

$$h(t) = \varphi(\mathrm{e}^{t/m}), \quad t \in H.$$

所以

$$f(z) = [\varphi^{-1}(z)]^m, \quad z \in \varphi\{\rho : |\rho| > R^{\frac{1}{m}}\}.$$

如果 $a_1 \neq 0$, 则

$$f(z) = a_1^{-m} z^m, \quad z \to \infty.$$

这就表明 $f(z)$ 是有理函数. 所以 $a_1 = 0$. 从而 $\varphi(\{\rho : |\rho| > R^{\frac{1}{m}}\} \cup \{\infty\})$ 是一个单连通区域, 不难得知这个区域恰为 $V$. □

**引理 3.3.4** 设 $f \in B$ 是复平面上的一个非常数的亚纯函数, 它的有限临界值和渐近值是一个有界集合, $R_0$ 是它的一个上界. 当 $R > R_0$ 时有

$$|f'(z)| > \frac{|f(z)|\log|f(z)|}{16\pi|z|} \quad (|f(z)| \geqslant R^2).$$

**证明** 设 $V$ 是 $f^{-1}(D_R)$ 的一个连通分支. 取 $c \notin V$. 并设 $L(z)$ 为 $\log(z-c)$ 在 $V$ 上的一个单值解析分支, $H = \{t : \mathrm{Re}t > \log R\}$. 令

$$\Phi(t) = L(g(\mathrm{e}^t) - c),$$

其中: $g : D_R \to V$, $g(f(z)) = z$, $z \in V$. 不难得知, $\Phi(t)$ 在 $H$ 上解析, $\Phi(H)$ 不含有半径超过 $\pi$ 的圆盘. 所以由 Bloch 定理

$$|\Phi'(t)| \leqslant \frac{\pi}{B(\mathrm{Re}t - \log R)}, \quad t \in H,$$

其中 $B$ 为 Bloch 常数. 从而有

$$\left|\frac{g'(\mathrm{e}^t)\mathrm{e}^t}{g(\mathrm{e}^t) - c}\right| \leqslant \frac{\pi}{B(\mathrm{Re}t - \log R)}.$$

因为 $\mathrm{e}^t = f(z)$, 所以

$$\left|\frac{f(z)}{(z-c)f'(z)}\right| = \left|\frac{g'(f(z))f(z)}{z-c}\right| \leqslant \frac{\pi}{B(\log|f(z)| - \log R)}.$$

因为 $|z-c| \leqslant 2|z|$, $\log|f(z)| \geqslant 2\log R$ 以及 $B > \dfrac{1}{4}$ 即得引理的结论. □

下面证明:

**定理 3.3.2** 设 $f$ 为开平面上的有穷级的超越亚纯函数, 并且有无限多个重级零点, 则对任意有限非零复数 $a$, $f' - a$ 有无限多个零点.

**证明** 设 $F = f/a$, 所以只要证 $F' - 1$ 有无限多个零点即可. 若不然, 由定理 3.3.1 , $z - F(z)$ 没有非直接渐近值. 由 Denjoy 定理, $z - F(z)$ 至多只有 $2\rho_f$ 个渐近值. 故 $z - F(z)$ 的有限临界值和渐近值是一个有界集合, 故为有界的. 因为 $F(z)$ 有无限多个重级零点, 可设 $z_n \to \infty$, $F(z_n) = F'(z_n) = 0$. 由引理 3.3.4

$$\left| z_n \frac{1 - F'(z_n)}{z_n - F(z_n)} \right| \geqslant \frac{1}{16\pi} \log|z_n - F(z_n)|.$$

即

$$1 \geqslant \frac{1}{16\pi} \log|z_n|,$$

矛盾. □

注：该定理对无穷级的亚纯函数 (甚至是整函数) 不成立.

**定理 3.3.3** *设 $f(z)$ 为开平面上的一个超越亚纯函数, $n$ 为正整数, 那么 $f^n f'$ 取任何非零有限复数有无限多次.*

**证明** 设 $F(z) = \dfrac{1}{n+1} f^{n+1}$. 那么 $F$ 的所有的零点均为重级.

**情形 1** 若 $F(z)$ 仅有有限个零点, 由 Hayman 不等式, $F' = f^n f'$ 取任何有限复数无限多次.

**情形 2** 若 $F(z)$ 有无限多个零点, 我们再分两种情况:

**情形 2.1** $F$ 是有穷级的亚纯函数. 由定理 3.3.2, $F'$ 取任何有穷复数无限多次.

**情形 2.2** 若 $F$ 为一个无穷级的亚纯函数, 从而 $f$ 也是无限级的. 那么, 存在 $z_n \to \infty$, 使得

$$f^{\#}(z_n) = \frac{|f'(z_n)|}{1 + |f(z_n)|^2} \to \infty.$$

设 $f_n(z) = f(z_n + z)$, $|z| < 1$. 那么 $\{f_n(z)\}$ 在 $z = 0$ 不正规. 由引理 3.1.3, 存在 $\{f_n\}$ 的子列 (不妨就设为 $\{f_n\}$ 自身), 以及 $z_n^\star \to 0$, 正数列 $\rho_n \to 0^+$,使得 $\left\{ \dfrac{f_n(z_n^\star + \rho_n \xi)}{\rho_n^{\frac{1}{n+1}}} \right\}$ 在复平面 $\mathbb{C}$ 上按球距内闭一致收敛于一个非常数的亚纯函数 $g(\xi)$, 满足 $g^{\#}(\xi) \leqslant g^{\#}(0) = 1$. $g$ 的级是有穷的. 若 $g^n g' \neq 1$, 由上面的证明可知 $g$ 是有理函数. 所以

$$g^n(\xi) g'(\xi) = 1 + o(1), \quad \xi \to \infty.$$

也就是

$$\frac{1}{n+1} g^{n+1}(\xi) \sim \xi, \quad \xi \to \infty,$$

矛盾. □

# 第 4 章　涉及例外函数的正规定则

在第 2 章和第 3 章里，我们主要讨论函数族中的函数及其导函数不取固定常数的亚纯函数族的正规性；本章我们将讨论函数族中的函数及其导函数不取固定函数 (全纯) 的亚纯函数族的正规性，主要介绍杨乐、庞学诚、L.Zalcman 等人在这方面的研究成果.

## 4.1　不取零点的亚纯函数族的正规性

杨乐 ([206], 定理 1) 改进了顾永兴 (定理 2.3.1) 的结果，证明了

**定理 4.1.1**　*设 $\mathcal{F}$ 为区域 $D$ 内的一族亚纯函数，$k$ 是一个正整数，$h(z)(\not\equiv 0)$ 在区域 $D$ 内全纯. 若对于 $\mathcal{F}$ 中的每一个函数 $f$ 有 $f(z)\neq 0$, $f^{(k)}(z)\neq h(z)$, 则 $\mathcal{F}$ 在 $D$ 内正规.*

**证明**　设 $z_0$ 为 $D$ 内任意一点, 以下我们证明 $\mathcal{F}$ 在 $z_0$ 处正规. 分两种情况讨论.

**情形 1**　$h(z_0)\neq 0$, 不妨设 $h(z_0)=1$, 则 $\mathcal{F}$ 在 $z_0$ 处正规. 事实上, 假如 $\mathcal{F}$ 在 $z_0$ 处不正规, 则由引理 3.1.3 知, 存在点列 $z_n\to z_0$, 函数列 $f_n(z)\in\mathcal{F}$, 正数列 $\rho_n\to 0^+$, 使得 $g_n(\zeta)=\rho_n^{-k}f_n(z_n+\rho_n\zeta)$ 在 $\mathbb{C}$ 上按球距内闭一致收敛到一个非常数的亚纯函数 $g(\zeta)$, 且 $g(\zeta)\neq 0$.

由于

$$g^{(k)}(\zeta)-1=\lim_{n\to\infty}g_n^{(k)}(\zeta)-h(z_0)=\lim_{n\to\infty}[f_n^{(k)}(z_n+\rho_n\zeta)-h(z_n+\rho_n\zeta)].$$

而 $f_n^{(k)}(z)-h(z)\neq 0$, 于是由 Hurwitz 定理, 知 $g^{(k)}(\zeta)\equiv 1$, 或 $g^{(k)}(\zeta)\neq 1$. 因此由 $g(\zeta)\neq 0$, 可知 $g^{(k)}(\zeta)\neq 1$. 故由 Hayman 不等式知，$g(\zeta)$ 是常数函数，矛盾. 所以 $\mathcal{F}$ 在 $z_0$ 处正规.

**情形 2**　$h(z_0)=0$, 则存在 $\delta>0$, 使得 $\overline{\Delta}(z_0,\delta)=\{z:|z-z_0|\leqslant\delta\}$ 含于 $D$ 内，且在此圆上，$h(z)$ 除去 $z_0$ 外没有其他零点. 由以上的讨论可知，$\mathcal{F}$ 在 $\Delta'(z_0,\delta)=\{z:0<|z-z_0|<\delta\}$ 内正规. 设 $\{f_n(z)\}$ 是 $\mathcal{F}$ 中的任意函数列, 则它含有一个子序列, 不失一般性，我们仍记为 $\{f_n\}$, 在区域 $D$ 内按球距内闭一致收敛到一个极限函数 $f(z)$. 以下再分两种情形：

**情形 2.1**　$f\not\equiv 0$. 若 $f\not\equiv\infty$, 则由 Hurwitz 定理可知, 在 $\Delta'(z_0,\delta)$ 内 $f\neq 0$. 于是有

$$\min_{0\leqslant\theta\leqslant2\pi}\left|f\left(z_0+\frac{\delta}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right)\right|=A>0,$$

其中 $A$ 是一个常数.

因此对于充分大的 $n$ 有

$$\min_{0\leqslant\theta\leqslant2\pi}\left|f_n\left(z_0+\frac{\delta}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right)\right|>\frac{A}{2}>0.$$

因为 $f_n$ 是亚纯函数且在 $\Delta(z_0,\delta)=\{z:|z-z_0|<\delta\}$ 内 $f_n\neq0$ , 于是 $1/f_n$ 在 $\Delta(z_0,\delta)$ 内全纯. 因此 $1/f_n$ 在 $\overline{\Delta}(z_0,\delta/2)=\{z:\ |z-z_0|\leqslant\delta/2\}$ 上全纯, 且有

$$\max_{0\leqslant\theta\leqslant2\pi}\frac{1}{|f_n(z_0+\frac{\delta}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})|}<\frac{2}{A}.$$

于是由最大模原理得到

$$\max_{|z-z_0|\leqslant\frac{\delta}{2}}\frac{1}{|f_n(z)|}<\frac{2}{A},$$

即

$$\min_{|z-z_0|\leqslant\frac{\delta}{2}}|f_n(z)|>\frac{A}{2}>0.$$

因此存在 $\{f_n\}$ 的一个子列在 $\Delta(z_0,\delta/2)$ 内按球距内闭一致收敛.

若 $f\equiv\infty$, 则 $\{f_n\}$ 在 $\Delta'(z_0,\delta)$ 内按球距内闭一致收敛到 $\infty$. 所以 $\{f_n\}$ 在 $\{z:\ |z-z_0|=\delta/2\}$ 上按球距内闭一致收敛到 $\infty$. 于是对于任意大的正数 $M$, 当 $n$ 充分大时有

$$\min_{0\leqslant\theta\leqslant2\pi}\left|f_n\left(z_0+\frac{\delta}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right)\right|>M>0.$$

以下与前面一样讨论可知, 存在 $\{f_n\}$ 的一个子列在 $\Delta(z_0,\delta/2)$ 内按球距内闭一致收敛.

**情形 2.2**　$f\equiv0$. 则 $\{f_n\}$ 在 $\Delta'(z_0,\delta)$ 内内闭一致收敛于 0. 于是 $\{f_n^{(k)}/h\}$ 和 $\{(f_n^{(k)}/h)'\}$ 在 $\Delta'(z_0,\delta)$ 内也内闭一致收敛于 0. 因而由辐角原理, 当 $n$ 充分大时有

$$\begin{aligned}&\left|N\left(\frac{\delta}{2},z_0,\frac{f_n^{(k)}}{h}-1\right)-N\left(\frac{\delta}{2},z_0,\frac{1}{f_n^{(k)}/h-1}\right)\right|\\=&\left|\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{|z-z_0|=\frac{\delta}{2}}\frac{(f_n^{(k)}(z)/h(z))'}{f_n^{(k)}(z)/h(z)-1}\mathrm{d}z\right|<1.\end{aligned}\tag{4.1.1}$$

由此可知, 对于充分大的 $n$, 有

$$N\left(\frac{\delta}{2}, z_0, f_n\right) \leqslant N\left(\frac{\delta}{2}, z_0, f_n^{(k)}/h - 1\right) = N\left(\frac{\delta}{2}, z_0, \frac{1}{f_n^{(k)}/h - 1}\right).$$

由于 $f_n^{(k)}/h \neq 1$, 于是 $f_n$ 在 $\Delta(z_0, \delta/2) = \{z : |z - z_0| < \delta/2\}$ 内全纯. 从而在此小圆内 $\{f_n\}$ 内闭一致收敛于 0. 于是 $\mathcal{F}$ 在 $z_0$ 处正规, 即 $\mathcal{F}$ 在 $D$ 内正规. □

由定理 4.1.1 即得

**推论** 设 $\mathcal{F}$ 为区域 $D$ 内的一族亚纯函数, $k$ 是一正整数. 若对于 $\mathcal{F}$ 中的每一个函数 $f$ 有 $f(z) \neq z$, $f^{(k)}(z) \neq z$, 则 $\mathcal{F}$ 在 $D$ 内正规.

关于这方面进一步的结果请参看文献[66], [86], [169], [170].

## 4.2 涉及零点重级的亚纯函数族的正规性

庞学诚, L. Zalcman 等人[154, 159, 194] 进一步改进了定理 4.1.1, 他们证明了

**定理 4.2.1** 设 $\mathcal{F}$ 为区域 $D$ 内的一族亚纯函数, $k$ 是一正整数, $h(z)(\neq 0)$ 在区域 $D$ 内全纯且它的零点均为重级零点. 若对于 $\mathcal{F}$ 中的每一个函数 $f$, $f$ 的零点重级 $\geqslant k+2$, 且 $f^{(k)}(z) \neq h(z)$, 则 $\mathcal{F}$ 在 $D$ 内正规.

由定理 4.2.1 即得如下结果:

**推论** 设 $\mathcal{F}$ 为区域 $D$ 内的一族亚纯函数, $k$ 是一正整数. 若对于 $\mathcal{F}$ 中的每一个函数 $f$, $f$ 的零点重级 $\geqslant k+2$, 且 $f^{(k)}(z) \neq 1$, 则 $\mathcal{F}$ 在 $D$ 内正规.

**定理 4.2.2** 设 $\mathcal{F}$ 为区域 $D$ 内的一族亚纯函数, $k$ 是一正整数, $h(z)(\neq 0)$ 在区域 $D$ 内全纯. 若对于 $\mathcal{F}$ 中的每一个函数 $f$, $f$ 的零点重级 $\geqslant k+2$, 极点均为重级极点, 且 $f^{(k)}(z) \neq h(z)$, 则 $\mathcal{F}$ 在 $D$ 内正规.

**定理 4.2.3** 设 $\mathcal{F}$ 为区域 $D$ 内的一族亚纯函数, $k$ 是一正整数, $h(z)(\neq 0)$ 在区域 $D$ 内全纯. 若对于 $\mathcal{F}$ 中的每一个函数 $f$, $f$ 的零点重级 $\geqslant k+3$, $f^{(k)}(z) \neq h(z)$, 则 $\mathcal{F}$ 在 $D$ 内正规.

为了证明上述结果, 我们需要如下引理.

**引理 4.2.1** 设 $p(z)$, $q(z)$ 是两个互素的多项式, $\deg p = n$, $\deg q = m$, $m < n$, 若 $\left(\dfrac{q(z)}{p(z)}\right)^{(k)} \neq 0$, 则有

(1) $m = 0$; (2) $\dfrac{q(z)}{p(z)} = \dfrac{1}{(az+b)^n}$, 其中 $a(\neq 0), b$ 是常数.

**证明** 先证明 (1) 成立. 当 $k = 1$ 时

$$\left(\frac{q}{p}\right)^{(k)} = \left(\frac{q}{p}\right)' = \frac{q'p - p'q}{p^2}, \tag{4.2.1}$$

设

$$q(z) = a_m z^m + a_{m-1}z^{m-1} + \cdots + a_0, a_m \neq 0,$$
$$p(z) = b_n z^n + b_{n-1}z^{n-1} + \cdots + b_0, b_n \neq 0,$$

则有

$$q'p - p'q = (m-n)a_m b_n z^{m+n-1} + \cdots + (a_1 b_0 - a_0 b_1). \tag{4.2.2}$$

因为 $\left(\dfrac{q}{p}\right)' \neq 0$, 则由 (4.2.1)~(4.2.2) 知, $q'p - p'q$ 的零点一定是 $p^2$ 的零点. 设 $q'p - p'q$ 的零点分别为 $c_1, c_2, \cdots, c_l$, 其相应的重级分别为 $n_1, n_2, \cdots, n_l$, 则由 $p, q$ 互素知, $c_i$ 是 $p$ 的 $n_i + 1$ 重零点, 于是有 $n_1 + n_2 + \cdots n_l = n + m - 1$, $2(n_1 + n_2 + \cdots n_l + l) \leqslant 2n$, 由此即得, $0 \leqslant m + l \leqslant 1$. 若 $l = 1$, 则 $m = 0$; 若 $l = 0$, 则由 (4.2.2) 式知, $n + m - 1 = 0$, 故由 $m < n$, 即得 $m = 0$. 因此 $k = 1$ 时 (1) 成立.

假如 $k = n$ 时 (1) 成立, 下面证明 $k = n + 1$ 时 (1) 仍成立. 设 $\left(\dfrac{q}{p}\right)^{(n)} = \dfrac{q_n}{p_n}$, 其中 $p_n, q_n$ 是两个互素的多项式, 则有 $\left(\dfrac{q}{p}\right)^{(n+1)} = \left(\dfrac{q_n}{p_n}\right)' \neq 0$. 用归纳法不难证明 $\deg q_n < \deg p_n$, 所以由前面的论证得 $\deg q_n = 0$, 因此有 $\left(\dfrac{q}{p}\right)^{(n)} = \dfrac{q_n}{p_n} \neq 0$, 于是即得 $\deg q = m = 0$. 于是 (1) 得证.

下面我们证明 (2) 成立. 由结论 (1) 知 $\dfrac{q}{p} = \dfrac{1}{p_1}$, 其中 $p_1$ 是 $n$ 次多项式, 显然 $\dfrac{1}{p_1} \neq 0$. 当 $k = 1$ 时, $\left(\dfrac{q}{p}\right)' = \left(\dfrac{1}{p_1(z)}\right)' = -\dfrac{p_1'(z)}{p_1^2(z)} \neq 0$, 于是 $p_1'(z)$ 的零点一定是 $p_1(z)$ 的零点, 由此不难验证 $p_1(z) = (az+b)^n$, 即 $\dfrac{q}{p} = \dfrac{1}{(az+b)^n}$, 故 $k = 1$ 时 (2) 成立. 当 $k \geqslant 2$ 时, 记 $\left(\dfrac{q}{p}\right)^{(k)} = \left(\dfrac{q_{k-1}}{p_{k-1}}\right)' \neq 0$, 其中 $p_{k-1}, q_{k-1}$ 是互素的多项式, 且 $\deg q_{k-1} < \deg p_{k-1}$, 由 (1) 知 $\dfrac{q_{k-1}}{p_{k-1}} = \dfrac{1}{R(z)}$, 其中 $R(z)$ 是多项式, 因此由前面的论证, 得 $R(z) = (a_1 z + b_1)^h$, 于是 $\left(\dfrac{q}{p}\right)^{(k)} = [\dfrac{1}{(a_1 z + b_1)^h}]' = \dfrac{1}{(a_2 z + b_2)^{h+1}}$, 其中 $\dfrac{b_1}{a_1} = \dfrac{b_2}{a_2}$. 由此结合 (1) 即得 $\dfrac{q}{p} = \dfrac{1}{(az+b)^n}$, 其中 $\dfrac{b}{a} = \dfrac{b_1}{a_1}$. 引理 4.2.1 得证. □

**引理 4.2.2** 设 $f(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_0 + \dfrac{q(z)}{p(z)}$, $a_0, a_1, \cdots, a_n$ 是常数, $a_n \neq 0$, $q(z), p(z)$ 是两个互素的多项式, 且 $\deg q < \deg p$, $k$ 是一正整数. 若 $f^{(k)}(z) \neq 1$, 则有

(1) $n = k$, 且 $n! a_n = 1$;

(2) $f(z) = \dfrac{1}{k!} z^k + \cdots + a_1 z + a_0 + \dfrac{1}{(az+b)^m}$;

(3) 若 $f(z)$ 的零点的重级均 $\geqslant k+1$, 则结论 (2) 式中 $m=1$, 且 $f(z)=\dfrac{(cz+d)^{k+1}}{az+b}$, 其中 $a,b,c,d$, 是常数, $a\neq 0$, $c\neq 0$.

**证明** 我们先证明 (1) 成立. 若 $n<k$, 则有

$$f^{(k)}(z)=\left(a_nz^n+a_{n-1}z^{n-1}+\cdots+a_0+\frac{q(z)}{p(z)}\right)^{(k)}=\left(\frac{q(z)}{p(z)}\right)^{(k)}=\frac{q_k(z)}{p_k(z)},$$

其中 $q_k(z),p_k(z)$ 是两个满足 $\deg q_k<\deg p_k$ 的互素多项式. 显然 $f^{(k)}(z)=\dfrac{q_k(z)}{p_k(z)}=1$ 有解, 与 $f^{(k)}\neq 1$ 矛盾. 因此 $n\geqslant k$. 若 $n>k$, 则有

$$\begin{aligned}f^{(k)}(z)&=(a_nz^n+a_{n-1}z^{n-1}+\cdots+a_0)^{(k)}+\left(\frac{q(z)}{p(z)}\right)^{(k)}\\&=p_1(z)+\left(\frac{q(z)}{p(z)}\right)^{(k)}=p_1(z)+\frac{q_k(z)}{p_k(z)},\end{aligned}$$

这里 $p_1(z)$ 是满足 $\deg p_1\geqslant 1$ 的多项式, $q_k,p_k$ 是满足 $\deg q_k<\deg p_k$ 的互素的多项式. 显然方程

$$f^{(k)}(z)=p_1(z)+\frac{q_k(z)}{p_k(z)}=\frac{p_1(z)p_k(z)+q_k(z)}{p_k(z)}=1$$

有解, 这与 $f^{(k)}\neq 1$ 矛盾. 因此 $n\leqslant k$, 于是即得 $n=k$.

故得 $f^{(k)}(z)=k!a_k+\dfrac{q_k(z)}{p_k(z)}$, 这里 $q_k(z)$, $p_k(z)$ 是满足 $\deg q_k<\deg p_k$ 的互素的多项式. 由于 $f^{(k)}\neq 1$, 我们断言: $k!a_k=1$. 事实上, 如果 $k!a_k\neq 1$, 则 $k!a_k=1+\alpha$, $\alpha\neq 0$, 于是有 $f^{(k)}(z)=1+\alpha+\dfrac{q_k(z)}{p_k(z)}=1+\dfrac{\alpha p_k(z)+q_k(z)}{p_k(z)}$.

显然 $\alpha p_k(z)+q_k(z)=0$ 有解, 因此 $f^{(k)}(z)=1$ 有解, 与 $f^{(k)}(z)\neq 1$ 矛盾. 于是我们推得 $k!a_k=1$. 因此结论 (1) 成立.

以下我们证明 (2) 成立. 由 (1) 得 $f(z)=\dfrac{1}{k!}z^k+\cdots+a_1z+a_0+\dfrac{q(z)}{p(z)}$, 于是有 $f^{(k)}(z)=1+\left(\dfrac{q(z)}{p(z)}\right)^{(k)}$. 因此由 $f^{(k)}(z)\neq 1$ 得到 $\left(\dfrac{q(z)}{p(z)}\right)^{(k)}\neq 0$, 于是由引理 4.1, 得 $\dfrac{q(z)}{p(z)}=\dfrac{1}{(az+b)^m}$, 即得 $f(z)=\dfrac{1}{k!}z^k+\cdots+a_1z+a_0+\dfrac{1}{(az+b)^m}$.

最后我们证明 (3) 成立. 令 $p(z)=\dfrac{1}{k!}z^k+\cdots+a_1z+a_0$, 则

$$f(z)=p(z)+\frac{1}{(az+b)^m}=\frac{p(z)(az+b)^m+1}{(az+b)^m}. \tag{4.2.3}$$

设 $p(z)(az+b)^m+1$ 的零点为 $c_1,c_2,\cdots,c_l$. 因为 $f(z)$ 的零点的重级 $\geqslant k+1$, 所以 $c_1$ 是 $p(z)(az+b)^m+1$ 的重级为 $n_1(\geqslant k+1)$ 的零点, 于是 $c_1$ 是 $[p(z)(az+b)^m+1]'$

的重级为 $n_1-1(\geqslant k)$ 的零点. 显然 $c_1\neq -\dfrac{b}{a}$, 于是由 $[p(z)(az+b)^m+1]'=(az+b)^{m-1}[p'(z)(az+b)+\mathrm{map}(z)]$ 知, $c_1$ 是 $p'(z)(az+b)+\mathrm{map}(z)$ 的重级为 $n_1-1(\geqslant k)$ 的零点. 由 $\deg(p'(z)(az+b)+\mathrm{map}(z))\leqslant k$, 可得 $n_1=k+1$. 因此 $c_1$ 是 $p(z)(az+b)^m+1$ 仅有的重级为 $k+1$ 的零点，于是即得 $p(z)(az+b)^m+1=B(z-c_1)^{k+1}$, 这里 $B$ 是一个常数. 所以我们推得 $m=1$, $f(z)=p(z)+\dfrac{1}{az+b}=\dfrac{(cz+d)^{k+1}}{az+b}$. 因此 (3) 成立. □

**引理 4.2.3**　设 $Q$ 是一个非常数有理函数, $m,k$ 是正整数，则

(1) 若 $Q$ 的零点重级均 $\geqslant k+2$, 则在复平面 $\mathbb{C}$ 上 $Q^{(k)}(z)=1$ 有解;

(2) 若 $Q$ 的零点重级均 $\geqslant k+2$, 则对于任意的正整数 $m\geqslant 2$, 在复平面 $\mathbb{C}$ 上 $Q^{(k)}(z)=z^m$ 有解;

(3) 若 $Q$ 的零点重级均 $\geqslant k+3$, 则对于任意的正整数 $m$, 在复平面 $\mathbb{C}$ 上 $Q^{(k)}(z)=z^m$ 有解;

(4) 若 $Q$ 的零点重级均 $\geqslant k+2$, 且它的极点的重级除 $z=0$ 外均 $\geqslant 2$, 则对于任意的正整数 $m$, 在复平面 $\mathbb{C}$ 上 $Q^{(k)}(z)=z^m$ 有解.

**证明**　令

$$g(z)=Q(z)-\frac{z^{m+k}}{(m+k)\cdots(m+1)}+\frac{z^k}{k!},\tag{4.2.4}$$

则 $g^{(k)}(z)=Q^{(k)}(z)-z^m+1$.

由于四种情形的证明是类似的, 以下我们只给出情形 (2) 的证明.

假如对于某个正整数 $m\geqslant 2$, $Q^{(k)}(z)\neq z^m$, 则有 $g^{(k)}(z)\neq 1$. 若 $Q$ 是非多项式有理函数则由引理 4.2.2 得

$$g(z)=\frac{z^k}{k!}+a_{k-1}z^{k-1}+\cdots+a_0+\frac{a}{(z+b)^n},\tag{4.2.5}$$

其中 $a\neq 0$, 即

$$Q(z)=\frac{z^{m+k}}{(m+k)\cdots(m+1)}+a_{k-1}z^{k-1}+\cdots+a_0+\frac{a}{(z+b)^n}.\tag{4.2.6}$$

设 $z_0$ 是 $Q$ 的一个零点, 则 $z_0$ 是 $Q$ 的一个重级 $\geqslant k+2$ 的零点, 于是有

$$0=Q^{(k)}(z_0)=z_0^m+\frac{(-1)^k n(n+1)\cdots(n+k-1)a}{(z_0+b)^{n+k}},\tag{4.2.7}$$

$$0=Q^{(k+1)}(z_0)=mz_0^{m-1}+\frac{(-1)^{k+1}n(n+1)\cdots(n+k-1)(n+k)a}{(z_0+b)^{n+k+1}}.\tag{4.2.8}$$

由 (4.2.7) 得 $z_0\neq 0$, 于是由 (4.2.7), (4.2.8) 式得

$$z_0=-\frac{mb}{m+n+k},$$

由此即得 $b\neq 0$. 因此由 (4.2.6) 得

$$Q(z)=\frac{\left(z+\dfrac{mb}{m+n+k}\right)^{m+n+k}}{(m+k)\cdots(m+1)(z+b)^n}. \tag{4.2.9}$$

于是由 (4.2.6), (4.2.9) 得

$$\begin{aligned}&z^{m+k}(z+b)^n+c(a_{k-1}z^{k-1}+\cdots+a_0)(z+b)^n+ca\\&=\left(z+\frac{mb}{m+n+k}\right)^{m+n+k},\end{aligned} \tag{4.2.10}$$

其中 $c=(m+k)(m+k-1)\cdots(m+1)$. 在 (4.2.10) 式中比较 $z^{m+n+k-1}$ 的系数得 $n=m$; 再比较 $z^{m+n+k-2}$ 的系数并利用 $m\geqslant 2$ 即得 $n+k=0$, 矛盾.

若 $Q$ 是多项式, 则由 $Q^{(k)}(z)\neq z^m$ 得 $Q^{(k)}(z)=z^m+c$, 其中 $c$ 是一个非零常数, 于是有 $Q^{(k+1)}=mz^{m-1}$. 因为 $Q$ 的零点的重级均 $\geqslant k+2$, $m\geqslant 2$, 而 $Q^{(k+1)}$ 仅在 $z=0$ 处为零, 于是有 $Q(0)=Q^{(k)}(0)=0$, 即 $c=0$, 矛盾. 所以 $Q^{(k)}(z)=z^m$ 在复平面 $\mathbb{C}$ 上有解, (2) 得证. □

**引理 4.2.4** *设 $f$ 是一个有穷级超越亚纯函数, $k$ 是正整数, $p(z)(\not\equiv 0)$ 是多项式. 若 $f$ 的零点重级均 $\geqslant k+1$, 则 $f^{(k)}(z)-p(z)$ 有无穷多个零点.*

**证明** 设 $p(z)=az^n+a_1z^{n-1}+\cdots+a_{n-1}z+a_n$, 其中 $a\neq 0$. 以下分两种情形讨论.

**情形 1** $f$ 只有有限个零点. 于是有

$$N\left(r,\frac{1}{f}\right)=O(\log r)=S(r,f). \tag{4.2.11}$$

显然由 Nevanlinna 理论得

$$\begin{aligned}&m\left(r,\frac{1}{f}\right)+m\left(r,\frac{1}{f^{(k)}-p}\right)\\&\leqslant m\left(r,\frac{1}{f^{(k+n)}}\right)+m\left(r,\frac{1}{f^{(k+n)}-n!a}\right)+S(r,f)\\&\leqslant m\left(r,\frac{1}{f^{(k+n)}}+\frac{1}{f^{(k+n)}-n!a}\right)+S(r,f)\\&\leqslant m\left(r,\frac{1}{f^{(k+n+1)}}\right)+S(r,f)\\&=T(r,f^{(k+n+1)})-N\left(r,\frac{1}{f^{(k+n+1)}}\right)+S(r,f)\\&\leqslant T(r,f^{(k)})+(n+1)\overline{N}(r,f)-N\left(r,\frac{1}{f^{(k+n+1)}}\right)+S(r,f),\end{aligned}$$

于是由定理 1.6.3( Frank-Weissenborn 引理), 定理 1.2.1(Nevanlinna 第一基本定理)及 (4.2.11) 得

$$\begin{aligned}
&T(r,f)\\
\leqslant &(n+1)\overline{N}(r,f)+N\left(r,\frac{1}{f}\right)+N\left(r,\frac{1}{f^{(k)}-p}\right)-N\left(r,\frac{1}{f^{(k+n+1)}}\right)+S(r,f)\\
\leqslant &\frac{n+1}{k+n+1}N(r,f)+N\left(r,\frac{1}{f}\right)+N\left(r,\frac{1}{f^{(k)}-p}\right)+\frac{1}{2(k+n+1)}T(r,f)+S(r,f)\\
\leqslant &\frac{2n+3}{2(k+n+1)}T(r,f)+N\left(r,\frac{1}{f^{(k)}-p}\right)+S(r,f).
\end{aligned}$$

由此即得

$$T(r,f)\leqslant(2n+4)N\left(r,\frac{1}{f^{(k)}-p}\right)+S(r,f).$$

所以 $f^{(k)}(z)-p(z)$ 有无穷多个零点.

**情形 2**　$f$ 有无穷多个零点，记为 $z_1, z_2, \cdots$. 令

$$g(z)=f^{(k-1)}(z)-\left(\frac{a}{n+1}z^{n+1}+\frac{a_1}{n}z^n+\cdots+a_nz\right),$$

则 $g'(z)=f^{(k)}(z)-p(z)$. 我们只要证明 $g'(z)$ 有无穷多个零点. 假如 $g'(z)$ 只有有穷个零点, 则由定理 3.3.1 知, $g(z)$ 没有非直接渐近值. 于是由 Denjoy-Carleman-Ahlfors 定理 [138] 知, $g(z)$ 至多有 $2\rho_g$ 个渐近值. 故 $g(z)$ 的有限临界值和渐近值是一个有界集合 (参见文献 [26] 中推论 3). 于是由引理 3.3.4 得

$$\frac{|z_jg'(z_j)|}{|g(z_j)|}\geqslant\frac{1}{16\pi}\log|g(z_j)|.$$

因为当 $j\to\infty$ 时, $\dfrac{1}{16\pi}\log|g(z_j)|\to\infty$, 于是当 $j\to\infty$ 时, $\dfrac{|z_jg'(z_j)|}{|g(z_j)|}\to\infty$. 另一方面由定理条件得, 当 $j\to\infty$ 时, $\dfrac{|z_jg'(z_j)|}{|g(z_j)|}\to n+1$, 矛盾. 因此 $g'(z)$ 有无穷多个零点, 即 $f^{(k)}(z)-p(z)$ 有无穷多个零点. □

**定理 4.2.1 的证明**　不妨设 $D=\Delta$. 设 $z_0$ 为 $D$ 内任意一点, 以下我们证明 $\mathcal{F}$ 在 $z_0$ 处正规. 分两种情况讨论.

**情形 1**　若 $h(z_0)\neq 0$, 不妨设 $h(z_0)=1$. 假如 $\mathcal{F}$ 在 $z_0$ 处不正规, 则由引理 3.1.3 知, 存在点列 $z_n\to z_0$, 函数列 $f_n(z)\in\mathcal{F}$, 正数列 $\rho_n\to 0^+$ 使得 $g_n(\zeta)=\rho_n^{-k}f_n(z_n+\rho_n\zeta)$ 在复平面 $\mathbb{C}$ 上按球距内闭一致收敛到一个非常数的亚纯函数 $g(\zeta)$, 且 $g(\zeta)$ 的零点重级 $\geqslant k+2$, $g(\zeta)$ 的级至多为 2.

由于

$$g^{(k)}(\zeta)-1=\lim_{n\to\infty}g_n^{(k)}(\zeta)-h(z_0)=\lim_{n\to\infty}[f_n^{(k)}(z_n+\rho_n\zeta)-h(z_n+\rho_n\zeta)].$$

而 $f_n^{(k)}(z)-h(z)\neq 0$, 于是由 Hurwitz 定理知, $g^{(k)}(\zeta)\equiv 1$, 或 $g^{(k)}(\zeta)\neq 1$. 因此由 $g(\zeta)$ 的零点重级 $\geqslant k+2$ 可知 $g^{(k)}(\zeta)\neq 1$. 故由引理 4.2.4 知 $g(\zeta)$ 为有理函数, 这与引理 4.2.3 的情形 (1) 矛盾. 所以 $\mathcal{F}$ 在 $z_0$ 处正规.

**情形 2** 若 $h(z_0)=0$. 不妨设 $z_0=0$, $h(z)=z^m+a_{m+1}z^{m+1}+\ldots=z^m b(z)$, $m\geqslant 2$, $b(0)=1$, 且在 $0<|z|<1$ 内 $h(z)\neq 0$.

考虑函数族 $\mathcal{H}=\{F:\ \ F(z)=\dfrac{f(z)}{z^m}, f\in\mathcal{F}\}$. 由于 $f^{(k)}(0)\neq h(0)=0$, 且 $f(z)$ 的零点重级 $\geqslant k+2$, 故 $f(0)\neq 0$, 所以 $F(0)=\infty$.

若 $\mathcal{H}$ 在 $z=0$ 处不正规, 则由引理 3.1.3 知, 存在点列 $z_n\to 0$, 函数列 $F_n(z)\in\mathcal{H}$, 正数列 $\rho_n\to 0^+$ 使得 $g_n(\zeta)=\rho_n^{-k}F_n(z_n+\rho_n\zeta)$ 在复平面 $\mathbb{C}$ 上按球距内闭一致收敛到一个非常数的亚纯函数 $g(\zeta)$, 且 $g(\zeta)$ 的零点重级 $\geqslant k+2$, $g(\zeta)$ 的级至多为 2.

以下再分两种情形来讨论.

情形 2.1 存在 $\{\dfrac{z_n}{\rho_n}\}$ 的一个子列趋于 $\infty$, 不妨仍记为 $\dfrac{z_n}{\rho_n}\to\infty$. 则

$$\begin{aligned} f_n^{(k)}(z) &= z^m F_n^{(k)}(z)+\sum_{l=1}^{k}\binom{k}{l}(z^m)^{(l)}F_n^{(k-l)}(z)\\ &= z^m F_n^{(k)}(z)+\sum_{l=1}^{k}c_l z^{m-l}F_n^{(k-l)}(z). \end{aligned}$$

其中

$$c_l=\begin{cases} m(m-1)\cdots(m-l+1)\dbinom{k}{l}, & l\leqslant m,\\ 0, & l>m. \end{cases}$$

因为 $\rho_n^l g_n^{(k-l)}(\zeta)=F_n^{(k-l)}(z_n+\rho_n\zeta),\quad l=0,1,\cdots,k$, 于是有

$$\frac{f_n^{(k)}(z_n+\rho_n\zeta)}{h(z_n+\rho_n\zeta)}=\left[g_n^{(k)}(\zeta)+\sum_{l=1}^{k}c_l\frac{g_n^{(k-l)}(\zeta)}{\left(\dfrac{z_n}{\rho_n}+\zeta\right)^l}\right]\frac{1}{b(z_n+\rho_n\zeta)}. \tag{4.2.12}$$

又因为当 $l=1,2,\cdots,k$ 时,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{c_l}{\left(\dfrac{z_n}{\rho_n}+\zeta\right)^l}=0, \tag{4.2.13}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{b(z_n+\rho_n\zeta)}=1, \tag{4.2.14}$$

所以由 (4.2.12)~(4.2.14) 知 $\dfrac{f_n^{(k)}(z_n+\rho_n\zeta)}{h(z_n+\rho_n\zeta)}$ 在复平面去掉 $g$ 的极点后的区域内内闭一致收敛于亚纯函数 $g^{(k)}(\zeta)$.

因为 $\frac{f_n^{(k)}(z)}{h(z)} \neq 1$, 所以由 Hurwitz 定理知, $g^{(k)}(\zeta) \equiv 1$, 或 $g^{(k)}(\zeta) \neq 1$. 于是由 $g(\zeta)$ 的零点重级 $\geqslant k+2$ 可知, $g^{(k)}(\zeta) \neq 1$. 故由引理 4.2.4 知, $g(\zeta)$ 为有理函数, 这与引理 4.2.3 的 (1) 矛盾.

情形 2.2 存在 $\{\frac{z_n}{\rho_n}\}$ 的一个子列不妨仍记为 $\frac{z_n}{\rho_n} \to \alpha$, $\alpha$ 为有限复数. 则有

$$\frac{F_n(\rho_n\zeta)}{\rho_n^k} = \frac{F_n(z_n + \rho_n(\zeta - \frac{z_n}{\rho_n}))}{\rho_n^k}$$

在复平面去掉 $g(\zeta-\alpha)$ 的极点后的区域内内闭一致收敛于一个亚纯函数 $g(\zeta-\alpha)$, 且 $g(\zeta-\alpha)$ 的零点重级 $\geqslant k+2$, $\zeta=0$ 为 $g(\zeta-\alpha)$ 的重级 $\geqslant m$ 的极点.

令

$$G_n(\zeta) = \frac{f_n(\rho_n\zeta)}{\rho_n^{m+k}} = \frac{F_n(\rho_n\zeta)}{\rho_n^k}\frac{(\rho_n\zeta)^m}{\rho_n^m},$$

则 $G_n(\zeta)$ 在复平面去掉 $g(\zeta-\alpha)$ 的极点后的区域内内闭一致收敛于一个亚纯函数 $\zeta^m g(\zeta-\alpha) = G(\zeta)$, 且 $G(\zeta)$ 的零点重数 $\geqslant k+2$. 由于 $\zeta=0$ 为 $g(\zeta-\alpha)$ 的重数 $\geqslant m$ 的极点, 故 $G(0) \neq 0$.

我们断言: 对于任意 $\zeta \in \mathbb{C}$, $G^{(k)}(\zeta) \neq \zeta^m$.

若存在 $\zeta_0$, 使得 $G^{(k)}(\zeta_0) = \zeta_0^m$, 则 $G(\zeta)$ 在 $\zeta_0$ 处解析. 又由于

$$G_n^{(k)}(\zeta) - \frac{h(\rho_n\zeta)}{\rho_n^m} = \frac{f_n^{(k)}(\rho_n\zeta) - h(\rho_n\zeta)}{\rho_n^m} \neq 0.$$

故由 Hurwitz 定理知, $G^{(k)}(\zeta) \equiv \zeta^m$, 或 $G^{(k)}(\zeta) \neq \zeta^m$, $\zeta \in \mathbb{C}$.

若 $G^{(k)}(\zeta) \equiv \zeta^m$, 则由 $G(\zeta)$ 的零点重级 $\geqslant k+2$ 可知 $G(\zeta)$ 存在零点, 设 $G(\zeta_0) = 0$, 则有 $G^{(k)}(\zeta_0) = 0$, 于是即得 $\zeta_0 = 0$. 因此有 $G(0) = 0$, 矛盾.

所以 $G^{(k)}(\zeta) \neq \zeta^m$. 于是由引理 4.2.4 知, $G(\zeta)$ 为有理函数, 这与引理 4.2.3 的 (2) 矛盾. 所以 $\mathcal{H}$ 在 $z=0$ 处正规.

下面证明 $\mathcal{F}$ 在 $z=0$ 处正规.

任取 $\{f_n(z)\} \subset \mathcal{F}$, 令 $F_n(z) = \frac{f_n(z)}{z^m}$, 则 $\{F_n(z)\} \subset \mathcal{H}$, 又由于 $\mathcal{H}$ 在 $z=0$ 处正规, 所以存在 $\{F_n(z)\}$ 的子列 (仍记为 $\{F_n(z)\}$), $\Delta(0,\delta) = \{z: |z| < \delta\}$ 使得在 $\Delta(0,\delta)$ 内 $\{F_n(z)\}$ 按球距内闭一致收敛于一个亚纯函数 $F(z)$. 又 $F(0) = \infty$, 故存在 $\delta_1 > 0$ 使得对 $z \in \Delta(0,\delta_1)$, 有 $|F(z)| \geqslant 1$. 故对 $z \in \Delta(0,\delta_1)$, 对于充分大的 $n$, 有 $f_n(z) \neq 0$. 所以 $\frac{1}{f_n}$ 在 $\Delta(0,\delta_1)$ 上解析. 而在 $|z| = \frac{\delta_1}{2}$ 上有 $|\frac{1}{f_n(z)}| = |\frac{1}{F_n(z)}\frac{1}{|z|^k}| \leqslant \frac{2^k}{\delta_1{}^k}$, 于是由最大模原理和 Montel 正规定则知, 存在 $f_n(z)$ 的子列在 $\Delta(0,\delta_1)$ 内内闭一致收敛, 即 $\mathcal{F}$ 在 $z=0$ 处正规.

类似地可以证明定理 4.2.2 和定理 4.2.3, 请读者自己给出证明. □

关于这方面进一步的结果请参看文献 [155]. 文献 [104] 也进一步考虑改进上述结果.

**问题 4.1** 定理 4.2.2 将 $f$ 的零点的重级 $\geqslant k+2$ 换为 $f$ 的零点的重级 $\geqslant k+1$, 结论是否仍然成立?

**注** 对于函数族里的每个函数的零点重级 $\geqslant k+1$ 的情形, 使用与定理 4.2.1 类似的方法可以证明如下结果:

设 $\mathcal{F}$ 为区域 $D$ 内的一族亚纯函数, $k$ 是一正整数, $a(z)(\neq 0)$ 在区域 $D$ 内全纯. 若对于 $\mathcal{F}$ 中的每一个函数 $f$, $f$ 的零点重级 $\geqslant k+1$, $f$ 的极点重级 $\geqslant 2$, 且 $f^{(k)}(z)\neq a(z)$, 则 $\mathcal{F}$ 在 $D$ 内正规.

上述结果的证明请读者自己给出, 或参看文献 [189].

## 4.3 Miranda 正规定则的改进与推广

1934 年, C. Miranda 证明了: 设 $\mathcal{F}$ 是区域 $D$ 内的一族全纯函数, $a,b(\neq 0)$ 是两个有穷复数, $k$ 是一正整数. 若对每个 $f\in\mathcal{F}$ 有 $f\neq a$, $f^{(k)}\neq b$, 则 $\mathcal{F}$ 在 $D$ 内正规.

常建明、方明亮和 L. Zalcman[42] 对上述 Miranda 定理做了推广与改进, 证明了

**定理 4.3.1** 设 $\mathcal{F}$ 是区域 $D$ 内的一族全纯函数, $k(\neq 2)$ 是一正整数, $h$ 是一正数, $a(z)$ 是一个在 $D$ 内不取零值的全纯函数. 若对每个 $f\in\mathcal{F}$, $f$ 的零点重级均 $\geqslant k$, 且有 $f(z)=0\Longrightarrow f^{(k)}(z)=a(z)$, $f^{(k)}(z)=a(z)\Longrightarrow |f^{(k+1)}(z)|\leqslant h$, 则 $\mathcal{F}$ 在 $D$ 内正规.

当 $k=2$ 时, 定理 4.3.1 不成立.

**例 4.1** 设 $\mathcal{F}=\{f_n\}$ 是单位圆盘 $\Delta$ 内的一族全纯函数, 其中

$$f_n(z)=\frac{1}{n^2}(\mathrm{e}^{nz}+\mathrm{e}^{-nz}-2)=\frac{1}{n^2}\mathrm{e}^{-nz}(\mathrm{e}^{nz}-1)^2,$$

则有

$$f_n^{(j)}(z)=n^{j-2}[\mathrm{e}^{nz}+(-1)^j\mathrm{e}^{-nz}],\ j=1,2,\cdots.$$

显然, $f_n$ 的每个零点都是二重的, 并且有 $f_n(z)=0\Longrightarrow f_n''(z)=2$ 和 $f_n''(z)=2\Longrightarrow f_n'''(z)=0$. 但 $\mathcal{F}$ 在 $\Delta$ 内不正规.

当 $k=2$ 时, 有如下结果

**定理 4.3.2** 设 $\mathcal{F}$ 是区域 $D$ 内的一族全纯函数, $a,b$ 是两个非零有穷复数, 若对每个 $f\in\mathcal{F}$, $f$ 的零点重级均 $\geqslant 2$, 并且有 $f(z)=0\Longrightarrow f''(z)=a, f''(z)=a\Longrightarrow f'''(z)=b$, 则 $\mathcal{F}$ 在 $D$ 内正规.

当 $k=2$ 时, 根据定理 4.3.1 及例 4.1, 很自然地要问, 如果定理 4.3.1 的 $f^{(k)}(z)=a(z)\Longrightarrow|f^{(k+1)}(z)|\leqslant h$ 换成 $f^{(k)}(z)=a(z)\Longrightarrow 0<|f^{(k+1)}(z)|\leqslant h$, 定理 4.3.1 是否还成立, 下面的例子表明答案是否定的.

**例 4.2**　设 $a(z)=\mathrm{e}^z$, $h=3\mathrm{e}$, $\mathcal{F}=\{f_n:\ n=2,3,\cdots\}$ 是单位圆盘 $\Delta$ 内的一族全纯函数, 其中

$$\begin{aligned}f_n(z)&=\frac{n^2-1}{2n^2}\left(\frac{\mathrm{e}^{(n+1)z}}{(n+1)^2}+\frac{\mathrm{e}^{-(n-1)z}}{(n-1)^2}-\frac{2\mathrm{e}^z}{n^2-1}\right)\\&=\frac{n^2-1}{2n^2}\mathrm{e}^{-(n-1)z}\left(\frac{\mathrm{e}^{nz}}{n+1}-\frac{1}{n-1}\right)^2.\end{aligned}\tag{4.3.1}$$

则有

$$f_n''(z)=\frac{n^2-1}{2n^2}\left(\mathrm{e}^{(n+1)z}+\mathrm{e}^{-(n-1)z}-\frac{2\mathrm{e}^z}{n^2-1}\right),\tag{4.3.2}$$

$$f_n'''(z)=\frac{n^2-1}{2n^2}\left((n+1)\mathrm{e}^{(n+1)z}-(n-1)\mathrm{e}^{-(n-1)z}-\frac{2\mathrm{e}^z}{n^2-1}\right).\tag{4.3.3}$$

显然, $f_n$ 的每个零点都是二重的. 如果 $f_n(z)=0$, 则由 (4.3.1) 得

$$\mathrm{e}^{nz}=\frac{n+1}{n-1},$$

因此由 (4.3.2) 得

$$f_n''(z)=\frac{n^2-1}{2n^2}\left(\frac{n+1}{n-1}+\frac{n-1}{n+1}-\frac{2}{n^2-1}\right)\mathrm{e}^z=\mathrm{e}^z.$$

从而 $f_n(z)=0\Longrightarrow f_n''(z)=\mathrm{e}^z$.

现在设 $z$ 满足 $f_n''(z)=\mathrm{e}^z$, 那么由 (4.3.2), 我们有

$$\mathrm{e}^{nz}+\mathrm{e}^{-nz}-\frac{2}{n^2-1}=\frac{2n^2}{n^2-1}.$$

由此可知, 或者有 $\mathrm{e}^{nz}=(n+1)/(n-1)$ 或者有 $\mathrm{e}^{nz}=(n-1)/(n+1)$.

如果 $\mathrm{e}^{nz}=(n+1)/(n-1)$, 那么由 (4.3.3) 有

$$\begin{aligned}f_n'''(z)&=\frac{n^2-1}{2n^2}\left((n+1)\frac{n+1}{n-1}-(n-1)\frac{n-1}{n+1}-\frac{2}{n^2-1}\right)\mathrm{e}^z\\&=\frac{n^2-1}{2n^2}\frac{(n+1)^3-(n-1)^3-2}{n^2-1}\mathrm{e}^z=3\mathrm{e}^z.\end{aligned}\tag{4.3.4}$$

如果 $\mathrm{e}^{nz}=(n-1)/(n+1)$, 那么由 (4.3.3) 有

$$\begin{aligned}f_n'''(z)&=\frac{n^2-1}{2n^2}\left((n+1)\frac{n-1}{n+1}-(n-1)\frac{n+1}{n-1}-\frac{2}{n^2-1}\right)\mathrm{e}^z\\&=\frac{n^2-1}{2n^2}\left(-2-\frac{2}{n^2-1}\right)\mathrm{e}^z=-\mathrm{e}^z.\end{aligned}\tag{4.3.5}$$

从而由 (4.3.4)~(4.3.5) 知, 在 $\Delta$ 内我们有 $f_n''(z)=\mathrm{e}^z \Longrightarrow 0<|f_n'''(z)|\leqslant 3\mathrm{e}$. 但 $\mathcal{F}$ 在 $\Delta$ 内不正规.

对 $k=2$ 和全纯函数 $a$, 有下列结论成立:

**定理 4.3.3** 设 $\mathcal{F}$ 是区域 $D$ 内的一族全纯函数, $h$ 是一正数, $s\geqslant 4$ 是一偶整数, $a$ 是一个在 $D$ 内不取零值的全纯函数. 若对于每个 $f\in\mathcal{F}$, $f$ 的零点重级均 $\geqslant 2$, 并且有 $f(z)=0\Longrightarrow f''(z)=a(z)$, $f''(z)=a(z)\Longrightarrow |f'''(z)|+|f^{(s)}(z)|\leqslant h$, 则 $\mathcal{F}$ 在 $D$ 内正规.

**注** 例 4.2 也表明, 在定理 4.3.3 中, 条件 $f''(z)=a(z)\Longrightarrow |f'''(z)|+|f^{(s)}(z)|\leqslant h$ 是必要的, 而且 $s$ 不能是奇数.

为证明定理 4.3.1, 我们需要如下引理.

**引理 4.3.1** 设 $g$ 是一个非常数整函数, 其级 $\rho(g)\leqslant 1$, 且它的零点重级均 $\geqslant k$, 又设 $a$ 是一个非零有穷复数. 若 $g(z)=0\Longrightarrow g^{(k)}(z)=a$, $g^{(k)}(z)=a\Longrightarrow g^{(k+1)}(z)=0$, 则

(1) 当 $k\neq 2$ 时有

$$g(z)=\frac{a}{k!}(z-z_0)^k; \tag{4.3.6}$$

(2) 当 $k=2$ 时有

$$\text{或者 } g(z)=\frac{a}{2}(z-z_0)^2, \text{ 或者 } g(z)=\left(A\mathrm{e}^{\lambda z}-\frac{a}{8A\lambda^2}\mathrm{e}^{-\lambda z}\right)^2. \tag{4.3.7}$$

**证明** 由 $g(z)=0\Longrightarrow g^{(k)}(z)=a\neq 0$ 和 $g$ 的零点重级均 $\geqslant k$ 知, $g$ 的每个零点之重级恰好为 $k$. 由于 $g$ 是整函数, 故存在一个非常数整函数 $h$, 其所有零点均为单重零点, 使得

$$g(z)=h^k(z). \tag{4.3.8}$$

设 $z=z_0$ 是 $h$ 的一个零点, 则在 $z_0$ 附近有

$$h(z)=a_1(z-z_0)+a_2(z-z_0)^2+O((z-z_0)^3)\quad (a_1\neq 0). \tag{4.3.9}$$

从而

$$g(z)=(h(z))^k=a_1^k(z-z_0)^k+ka_1^{k-1}a_2(z-z_0)^{k+1}+O((z-z_0)^{k+2}),$$

因此

$$g^{(k+1)}(z_0)=(k+1)!ka_1^{k-1}a_2. \tag{4.3.10}$$

于是由 $g(z)=0 \Longrightarrow g^{(k+1)}(z)=0$ 得 $a_2=0$, 即 $h''(z_0)=0$. 这就证明了

$$h(z)=0 \Longrightarrow h''(z)=0. \tag{4.3.11}$$

置

$$P=\frac{h''}{h}. \tag{4.3.12}$$

则由 $h$ 的所有零点均为单重零点可知, $P$ 是一个整函数. 于是由 $\rho(g)\leqslant 1$ 和 (4.3.8) 知 $\rho(h)\leqslant 1$, 从而由对数导数引理的推论 3 知, 当 $r\to\infty$ 时, 有

$$T(r,P)=T\left(r,\frac{h''}{h}\right)=m\left(r,\frac{h''}{h}\right)=o(\log r),$$

从而 $P$ 是一个常数. 以下分两种情形:

**情形 1**　$P=0$. 则由 (4.3.12) 得 $h''\equiv 0$, 从而 $h(z)=cz+d$, 其中 $c(\neq 0),d$ 是常数. 于是有

$$g(z)=(cz+d)^k,$$

$$g^{(k)}(z)\equiv k!c^k.$$

由引理的条件即得 $k!c^k=a$. 这样就有

$$g(z)=\frac{a}{k!}(z-z_0)^k.$$

**情形 2**　$P\neq 0$. 解方程 (4.3.12) 得

$$h=A\mathrm{e}^{\lambda z}+B\mathrm{e}^{-\lambda z},$$

其中 $A,B$ 是常数, $\lambda(\neq 0)$ 是方程 $z^2=P$ 的一个根.

显然, 从引理的假设条件可得 $A\neq 0$, $B\neq 0$. 于是由 (4.3.8), 我们有

$$g(z)=\left(A\mathrm{e}^{\lambda z}+B\mathrm{e}^{-\lambda z}\right)^k=\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}A^jB^{k-j}\mathrm{e}^{(2j-k)\lambda z}. \tag{4.3.13}$$

从而有

$$g^{(k)}(z)=\lambda^k\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}A^jB^{k-j}(2j-k)^k\mathrm{e}^{(2j-k)\lambda z}, \tag{4.3.14}$$

$$g^{(k+1)}(z)=\lambda^{k+1}\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}A^jB^{k-j}(2j-k)^{k+1}\mathrm{e}^{(2j-k)\lambda z}. \tag{4.3.15}$$

设 $z_0$ 是 $g$ 的一个零点, 则由 (4.3.13) 得 $e^{2\lambda z_0} = -B/A$.

以下我们再分两种情形:

**情形 2.1** $k = 2m+1$. 易见存在两点 $z_0$, $z_1$ 满足 $e^{\lambda z_0} = K$, $e^{\lambda z_1} = -K$, 其中 $K$ 是满足 $K^2 = -B/A$ 的常数. 于是由 (4.3.13), 得 $g(z_0) = 0$, $g(z_1) = 0$. 因此由 $g(z) = 0 \Longrightarrow g^{(k)}(z) = a$, 得 $a = g^{(k)}(z_0) = g^{(k)}(z_1)$. 故由 (4.3.14), 我们有

$$\begin{aligned}2a =& g^{(k)}(z_0) + g^{(k)}(z_1)\\ =& \lambda^{2m+1}\sum_{j=0}^{2m+1}\binom{2m+1}{j}A^jB^{2m+1-j}(2j-2m-1)^{2m+1}[K^{2j-2m-1}\\ &+(-K)^{2j-2m-1}]\\ =& 0,\end{aligned} \tag{4.3.16}$$

这与 $a \neq 0$ 矛盾.

**情形 2.2** $k = 2m$. 将 $e^{2\lambda z_0} = -B/A$ 代入 (4.3.14) 得

$$a = \lambda^{2m}A^mB^m\sum_{j=0}^{2m}(-1)^{j-m}\binom{2m}{j}(2j-2m)^{2m}. \tag{4.3.17}$$

于是由 (4.3.14)~(4.3.15) 得

$$g^{(2m)}(z) = \lambda^{2m}\sum_{j=0}^{2m}\binom{2m}{j}A^jB^{2m-j}(2j-2m)^{2m}e^{2(j-m)\lambda z}, \tag{4.3.18}$$

$$g^{(2m+1)}(z) = \lambda^{2m+1}\sum_{j=0}^{2m}\binom{2m}{j}A^jB^{2m-j}(2j-2m)^{2m+1}e^{2(j-m)\lambda z}. \tag{4.3.19}$$

若 $m = 1$, 则由 (4.3.17) 得 $a = -8AB\lambda^2$; 从而由 (4.3.13) 得

$$g = \left(Ae^{\lambda z} - \frac{a}{8A\lambda^2}e^{-\lambda z}\right)^2.$$

以下设 $m \geqslant 2$.

由 (4.3.17)~(4.3.19) 得

$$\begin{aligned}g^{(2m)}(z) - a =& (2\lambda)^{2m}B^{2m}e^{-2m\lambda z}\left[\sum_{j=0}^{2m}(-1)^j\binom{2m}{j}(j-m)^{2m}\left(-\frac{A}{B}e^{2\lambda z}\right)^j\right.\\ &\left.-\left(-\frac{A}{B}e^{2\lambda z}\right)^m\sum_{j=0}^{2m}(-1)^j\binom{2m}{j}(j-m)^{2m}\right],\end{aligned} \tag{4.3.20}$$

$$g^{(2m+1)}(z)=(2\lambda)^{2m+1}B^{2m}e^{-2m\lambda z}\sum_{j=0}^{2m}(-1)^j\binom{2m}{j}(j-m)^{2m+1}\left(-\frac{A}{B}e^{2\lambda z}\right)^j. \quad (4.3.21)$$

记

$$\omega=-\frac{A}{B}e^{2\lambda z}.$$

由于 $g^{(2m)}(z)=a \Longrightarrow g^{(2m+1)}(z)=0$, 所以方程

$$\sum_{j=0}^{2m}(-1)^j\binom{2m}{j}(j-m)^{2m}\omega^j=\omega^m\sum_{j=0}^{2m}(-1)^j\binom{2m}{j}(j-m)^{2m} \quad (4.3.22)$$

的每个根也是方程

$$\sum_{j=0}^{2m}(-1)^j\binom{2m}{j}(j-m)^{2m+1}\omega^j=0. \quad (4.3.23)$$

的根.

设 $\omega=\omega_0$ 是方程 (4.3.22) 的任意一个解, 则由 (4.3.23) 和 (4.3.22) 得

$$\begin{aligned}&\sum_{j=0}^{2m}(-1)^j\binom{2m}{j}(j-m)^{2m}j\omega_0^j\\&=m\sum_{j=0}^{2m}(-1)^j\binom{2m}{j}(j-m)^{2m}\omega_0^j=m\omega_0^m\sum_{j=0}^{2m}(-1)^j\binom{2m}{j}(j-m)^{2m}.\end{aligned}$$

显然 $\omega=0$ 不是方程 (4.3.22) 的根, 于是方程 (4.3.22) 的每个根都是重根.

将方程 (4.3.22) 重新整理得

$$\sum_{j=0}^{m-1}(-1)^j\binom{2m}{j}(j-m)^{2m}(\omega^j+\omega^{2m-j}-2\omega^m)=0. \quad (4.3.24)$$

记方程 (4.3.24) 的左边为 $Q(\omega)$, 则 $Q(\omega)$ 是一个整系数多项式. 于是易得

$$Q(\omega)=(\omega-1)^2\sum_{j=0}^{m-1}(-1)^j\binom{2m}{j}(j-m)^{2m}\omega^j\left(\sum_{s=0}^{m-1-j}\omega^s\right)^2. \quad (4.3.25)$$

由整数环 $\mathbb{Z}[\omega]$ 上多项式的因式分解定理 (参见文献 [56]134 页和 167 页) 得

$$Q(\omega)=N_0(\omega-1)^{p_0}Q_1^{p_1}(\omega)Q_2^{p_2}(\omega)\cdots Q_n^{p_n}(\omega), \quad (4.3.26)$$

其中 $Q_j(\omega)$ $(1\leqslant j\leqslant n)$ 是 $\mathbb{Z}[\omega]$ 上互质的不可约多项式, $p_j$ $(\geqslant 2, 0\leqslant j\leqslant n)$ 是整数, $N_0$ 是 $Q(\omega)$ 的系数的最大公因数. 显然 $N_0$ 也是 $Q(\omega)/(\omega-1)^2$ 的系数的最大公因数.

现在再分两种情形:

**情形 2.2.1** $m \geqslant 2$ 是偶数.

记

$$a_j = (-1)^j \frac{1}{2m}\binom{2m}{j}(j-m)^{2m}, \ (0 \leqslant j \leqslant m-1).$$

则 $a_j(j=0,1,\cdots,m-1)$ 是整数, 并且

$$a_0 = \frac{1}{2}m^{2m-1} = 2k_1, \quad a_1 = -(m-1)^{2m} = 2k_2+1,$$

其中 $k_1$ 和 $k_2$ 是整数.

于是 $N_0 = 2m(2l+1)$, 其中 $l$ 是整数, 而且 $R(\omega) = Q(\omega)/(2m)$ 是整系数多项式. 由 (4.3.25) 式得

$$\begin{aligned} R(\omega) &= (\omega-1)^2 \sum_{j=0}^{m-1} a_j \omega^j \left(\sum_{s=0}^{m-1-j} \omega^s\right)^2 \\ &= 2k_1(\omega-1)^2\left(\sum_{s=0}^{m-1}\omega^s\right)^2 + \omega\left[(2k_2+1)(\omega-1)^2\left(\sum_{s=0}^{m-2}\omega^s\right)^2\right. \\ &\quad \left. + \sum_{j=2}^{m-1} a_j \omega^{j-1}(\omega-1)^2\left(\sum_{s=0}^{m-1-j}\omega^s\right)^2\right] \\ &= 2k_1 A(\omega) + \omega[(2k_2+1)B(\omega) + C(\omega)], \end{aligned} \tag{4.3.27}$$

其中

$$A(\omega) = (\omega-1)^2\left(\sum_{s=0}^{m-1}\omega^s\right)^2,$$

$$B(\omega) = (\omega-1)^2\left(\sum_{s=0}^{m-2}\omega^s\right)^2,$$

$$C(\omega) = \sum_{j=2}^{m-1} a_j\omega^{j-1}(\omega-1)^2\left(\sum_{s=0}^{m-1-j}\omega^s\right)^2.$$

因此由 (4.3.26) 得

$$\begin{aligned} &(2l+1)(\omega-1)^{p_0}Q_1^{p_1}(\omega)Q_2^{p_2}(\omega)\cdots Q_n^{p_n}(\omega) \\ =\ & 2k_1A(\omega) + \omega[(2k_2+1)B(\omega)+C(\omega)]. \end{aligned} \tag{4.3.28}$$

于是在上式中取 $\omega = 0$ 即得

$$(2l+1)(-1)^{p_0}Q_1^{p_1}(0)Q_2^{p_2}(0)\cdots Q_n^{p_n}(0) = 2k_1.$$

因此存在 $j$ 使得 $Q_j^{p_j}(0)$ 是一偶数. 不失一般性, 我们可设 $j=1$. 那么 $Q_1(0)$ 是一偶数, 设 $Q_1(0)=2k_3$, 其中 $k_3$ 是整数. 于是有

$$Q_1(\omega)=\omega Q_{11}(\omega)+Q_1(0)=\omega Q_{11}(\omega)+2k_3. \tag{4.3.29}$$

将 (4.3.29) 代入 (4.3.28) 得

$$\begin{aligned}&(2l+1)(\omega-1)^{p_0}[\omega^{p_1}Q_{11}^{p_1}(\omega)+2k_3D(\omega)]Q_2^{p_2}(\omega)\cdots Q_n^{p_n}(\omega)\\=&2k_1A(\omega)+\omega[(2k_2+1)B(\omega)+C(\omega)],\end{aligned}$$

其中 $D(\omega)$ 是一个整系数多项式.

于是即得

$$\begin{aligned}&(2l+1)(\omega-1)^{p_0}\omega^{p_1}Q_{11}^{p_1}(\omega)Q_2^{p_2}(\omega)\cdots Q_n^{p_n}(\omega)\\&+2(2l+1)k_3D(\omega)(\omega-1)^{p_0}Q_2^{p_2}(\omega)\cdots Q_n^{p_n}(\omega)\\=&\ 2k_1A(\omega)+\omega[(2k_2+1)B(\omega)+C(\omega)].\end{aligned}\tag{4.3.30}$$

对 (4.3.30) 两边求导得

$$\begin{aligned}&(2l+1)p_1\omega^{p_1-1}(\omega-1)^{p_0}Q_{11}^{p_1}(\omega)Q_2^{p_2}(\omega)\cdots Q_n^{p_n}(\omega)\\&+(2l+1)\omega^{p_1}[(\omega-1)^{p_0}Q_{11}^{p_1}(\omega)Q_2^{p_2}(\omega)\cdots Q_n^{p_n}(\omega)]'\\&+2(2l+1)k_3[D(\omega)(\omega-1)^{p_0}Q_2^{p_2}(\omega)\cdots Q_n^{p_n}(\omega)]'\\=&2k_1A'(\omega)+[(2k_2+1)B(\omega)+C(\omega)]\\&+\omega[(2k_2+1)B'(\omega)+C'(\omega)].\end{aligned}\tag{4.3.31}$$

在 (4.3.31) 中令 $\omega=0$ 可知 $2k_2+1$ 是偶数, 矛盾.

**情形 2.2.2**　$m\geqslant 3$ 是奇数.

设 $p$ 是 $m$ 的一个质因数, 并记

$$b_j=(-1)^j\frac{1}{m}\binom{2m}{j}(j-m)^{2m}\ (0\leqslant j\leqslant m-1).$$

则 $b_j(j=0,1,\cdots,m-1)$ 是整数, 并且

$$b_0=m^{2m-1}=k_1p,\quad b_1=-2(m-1)^{2m}=k_2p-2,$$

其中 $k_1$ 和 $k_2$ 是整数. 从而 $N_0=m(lp+q)$, 其中 $l,q$ 是整数而且 $1\leqslant q\leqslant p-1$. 于

是 $S(\omega)=Q(\omega)/m$ 是整系数多项式. 因此由 (4.3.25) 得

$$\begin{aligned}S(\omega)&=(\omega-1)^2\sum_{j=0}^{m-1}b_j\omega^j\left(\sum_{s=0}^{m-1-j}\omega^s\right)^2\\&=k_1p(\omega-1)^2\left(\sum_{s=0}^{m-1}\omega^s\right)^2+\omega\left[(k_2p+2)(\omega-1)^2\left(\sum_{s=0}^{m-2}\omega^s\right)^2\right.\\&\quad\left.+\sum_{j=2}^{m-1}b_j\omega^{j-1}(\omega-1)^2\left(\sum_{s=0}^{m-1-j}\omega^s\right)^2\right]\\&=k_1pA(\omega)+\omega[(k_2p-2)B(\omega)+C(\omega)],\end{aligned}\tag{4.3.32}$$

其中 $A(\omega)$, $B(\omega)$, 和 $C(\omega)$ 由 (4.3.27) 所定义.

以下跟情形 2.2.1 一样讨论可得 $k_2p-2=\lambda p$, 其中 $k_2$, $\lambda$ 是整数, $p\geqslant 3$ 是质数, 矛盾. 引理 4.3.1 证毕. □

完全类似地可以证明如下引理, 这个引理在定理 4.3.3 的证明中用到.

**引理 4.3.2** 设 $g$ 是一个级 $\rho(g)\leqslant 1$ 的非常数整函数, 其零点重级均 $\geqslant 2$, $a$ 是一非零有穷复数, $s\geqslant 4$ 是一偶数. 若有 $g(z)=0\Longrightarrow g''(z)=a$ 和 $g''(z)=a\Longrightarrow g'''(z)=g^{(s)}(z)=0$, 则 $g(z)=a(z-z_0)^2/2$, 其中 $z_0$ 是常数.

**定理 4.3.1 的证明** 只需证明 $\mathcal{F}$ 在每个闭包都含在 $D$ 内的圆盘 $\Delta$ 内正规就行. 不妨设 $\Delta$ 是单位圆盘.

假设 $\mathcal{F}$ 在 $\Delta$ 内不正规, 则由引理 3.1.3($\alpha=k$), 存在 $f_n\in\mathcal{F}$, $z_n\in\Delta$, $|z_n|<r<1$, 和 $\rho_n\to 0^+$, 使得 $g_n(\zeta)=\rho_n^{-k}f_n(z_n+\rho_n\zeta)$ 在 $\mathbb{C}$ 上局部一致收敛到一个级不超过 1 的非常数整函数 $g$, 而且 $g$ 满足 $g^{\#}(\zeta)\leqslant g^{\#}(0)=k(|d|+1)+1$, 其中 $d=\max\{|a(z)|:|z|\leqslant 1\}$, 并且 $g$ 的零点重级均 $\geqslant k$. 不妨设 $z_n\to z_0\in\Delta$.

我们断言

(i) $g(\zeta)=0\Longrightarrow g^{(k)}(\zeta)=a(z_0)$;

(ii) $g^{(k)}(\zeta)=a(z_0)\Longrightarrow g^{(k+1)}(\zeta)=0$.

先证 (i). 设 $\zeta_0$ 满足 $g(\zeta_0)=0$. 则由 Hurwitz 定理, 存在 $\zeta_n$, $\zeta_n\to\zeta_0$, 使得对于充分大的 $n$ 有

$$g_n(\zeta_n)=\rho_n^{-k}f_n(z_n+\rho_n\zeta_n)=0.$$

从而 $f_n(z_n+\rho_n\zeta_n)=0$. 于是由 $f_n(\zeta)=0\Longrightarrow f_n^{(k)}(\zeta)=a(\zeta)$ 得

$$g_n^{(k)}(\zeta_n)=f_n^{(k)}(z_n+\rho_n\zeta_n)=a(z_n+\rho_n\zeta_n).$$

从而 $g^{(k)}(\zeta_0)=\lim\limits_{n\to\infty}g_n^{(k)}(\zeta_n)=a(z_0)$. 这就证明了 $g(\zeta)=0\Longrightarrow g^{(k)}(\zeta)=a(z_0)$. (i) 得证.

再证 (ii). 设 $\zeta_0$ 满足 $g^{(k)}(\zeta_0)=a(z_0)$, 则 $g(\zeta_0)\neq\infty$, 并且 $g^{(k)}(\zeta)\not\equiv a(z_0)$. 否则, 我们有 $g(\zeta)=\dfrac{a(z_0)}{k!}(\zeta-\zeta_1)^k$. 经简单的计算得

$$g^{\#}(0)\leqslant\begin{cases}k/2, & |\zeta_1|\geqslant 1,\\ |a(z_0)|, & |\zeta_1|<1,\end{cases}$$

从而有 $g^{\#}(0)<k(|d|+1)+1$, 与 $g^{\#}(0)=k(|d|+1)+1$ 矛盾. 由于 $g^{(k)}(\zeta_0)-a(z_0)=0$, 并且在 $\zeta_0$ 的一个邻域上, $g_n^{(k)}(z_n+\rho_n\zeta)-a(z_n+\rho_n\zeta)\to g^{(k)}(\zeta)-a(z_0)$, 于是根据 Hurwitz 定理, 存在 $\zeta_n$, $\zeta_n\to\zeta_0$, 使得对于充分大的 $n$ 有 $f_n^{(k)}(z_n+\rho_n\zeta_n)=g_n^{(k)}(\zeta_n)=a(z_n+\rho_n\zeta_n)$. 由此即知 $|f_n^{(k+1)}(z_n+\rho_n\zeta_n)|\leqslant h$, 从而 $|g_n^{(k+1)}(\zeta_n)|=|\rho_n f_n^{(k+1)}(z_n+\rho_n\zeta_n)|\leqslant\rho_n h$. 于是得 $g^{(k+1)}(\zeta_0)=\lim\limits_{n\to\infty}g_n^{(k+1)}(\zeta_n)=0$. 这就证明了 (ii).

于是, 由引理 4.3.1 有 $g(\zeta)=\dfrac{a(z_0)}{k!}(\zeta-\zeta_1)^k$. 由此可知, $g^{\#}(0)<k(|d|+1)+1$, 矛盾.

因此 $\mathcal{F}$ 在 $\Delta$ 内正规, 从而 $\mathcal{F}$ 在 $D$ 内正规. □

**定理 4.3.2 的证明** 不妨设 $D$ 为单位圆 $\Delta$. 假设 $\mathcal{F}$ 在 $\Delta$ 内不正规. 则由引理 3.1.3 知, 存在函数列 $f_n\in\mathcal{F}$, 点列$z_n\in\Delta$, 和正数列 $\rho_n\to 0^+$, 使得 $g_n(\zeta)=\rho_n^{-2}f_n(z_n+\rho_n\zeta)$ 在复平面 $\mathbb{C}$ 上内闭一致收敛于一个非常数的整函数 $g$, 它的零点都是重级零点, 并且满足 $g^{\#}(\zeta)\leqslant g^{\#}(0)=2(|a|+1)+1$. 于是由定理 1.3.3 得 $\rho(g)\leqslant 1$.

用定理 4.3.1 的证明方法一样证得

(i) $g(\zeta)=0\Longrightarrow g''(\zeta)=a$;

(ii) $g''(\zeta)=a\Longrightarrow g'''(\zeta)=0$.

如果 $g\neq 0$, 则 $g(\zeta)=e^{A\zeta+B}$, 其中 $A\neq 0$, $B$ 是常数. 于是有

$$g''(\zeta)=A^2\mathrm{e}^{A\zeta+B},\ g'''(\zeta)=A^3\mathrm{e}^{A\zeta+B}.$$

设 $g''(\zeta_0)=a$. 则 $A^3\mathrm{e}^{A\zeta_0+B}=g'''(\zeta_0)=0$, 这是不可能的. 所以存在 $\zeta_0$ 使得 $g(\zeta_0)=0$. 易知 $g''\not\equiv a$, 否则, 则有 $g(\zeta)=\dfrac{a}{2}(\zeta-\zeta_1)^2$, 经简单的计算得 $g^{\#}(0)<2(|a|+1)+1$, 与 $g^{\#}(0)=2(|a|+1)+1$ 矛盾.

于是由 (i) 和 (ii) 知, $\zeta_0$ 是$g''(\zeta)-a$ 的重级为 $m\geqslant 2$ 的零点. 因此 $g^{(2+m)}(\zeta_0)\neq 0$, 并且存在 $\delta>0$ 使得, 当 $|\zeta-\zeta_0|<\delta$ 时, 有

$$g^{(2+m)}(\zeta)\neq 0. \tag{4.3.33}$$

所以由 Hurwitz 定理, 存在 $m$ 个序列 $\{\zeta_{in}\}, i=1,2,\cdots,m$ 使得 $\lim\limits_{n\to\infty}\zeta_{in}=\zeta_0$,

并且对于充分大的 $n$ 有

$$g_n''(\zeta_{in}) = a, \quad i = 1, 2, \cdots, m. \tag{4.3.34}$$

因此由 $f_n''(z) = a \Longrightarrow f_n'''(z) = b$, 我们得到

$$g_n'''(\zeta_{in}) = \rho_n f_n'''(z_n + \rho_n \zeta_{in}) = \rho_n b \neq 0 \ (i = 1, 2, \cdots, m). \tag{4.3.35}$$

于是有

$$\zeta_{in} \neq \zeta_{jn}, \quad 1 \leqslant i < j \leqslant m. \tag{4.3.36}$$

故由 (4.3.35) 和 (4.3.36) 得, $g^{(2+m)}(\zeta_0) = 0$, 与 (4.3.33) 矛盾.

因此 $\mathcal{F}$ 在 $D$ 内正规. □

定理 4.3.3 的证明与定理 4.3.1 的证明完全类似, 只是在使用引理 4.3.1 的地方换为引理 4.3.2 即可, 请读者自己给出证明.

# 第 5 章　与分担值相关的亚纯函数族

把亚纯函数正规族与分担值或分担函数结合起来考虑是亚纯函数正规族理论研究的一个重要课题，这方面的工作由 Schwick [166] 最早开始研究，之后国内外许多学者对这方面的问题进行深入的研究，本章将介绍近年来与这一课题有关的研究成果.

## 5.1　分担两个值的亚纯函数族

设 $f$ 和 $g$ 是区域 $D$ 内的两个亚纯函数, $a$ 是一个复数. 若 $f(z)-a$ 与 $g(z)-a$ 在 $D$ 内有相同的零点, 则称 $f$ 与 $g$ 在区域 $D$ 内分担 $a$, 或称 IM 分担 $a$, 若 $f(z)-a$ 与 $g(z)-a$ 在 $D$ 内有相同的零点并且所有零点的重级也相同, 则称 $f$ 与 $g$ 在区域 $D$ 内 CM 分担 $a$. 以下若无声明均指 IM 分担. 我们用 $f=a \Rightarrow g=a$ 来表示：若 $f=a$ 则 $g=a$; 用 $f=a \rightarrow g=a$ 表示：若 $z_0$ 是 $f-a$ 的 $m$ 级零点, 则 $z_0$ 是 $g-a$ 的至少 $m$ 级零点.

1992 年, W. Schwick [166] 开始研究与分担值相关的亚纯函数族的正规性问题, 他证明了

**定理 5.1.1**　*设 $\mathcal{F}$ 是区域 $D$ 内的一族亚纯函数, $a_1, a_2, a_3$ 是三个判别的有穷复数. 若对于 $\mathcal{F}$ 中的任意函数 $f$, $f$ 和 $f'$ 在 $D$ 内分担 $a_1, a_2, a_3$, 则 $\mathcal{F}$ 在 $D$ 内正规.*

庞学诚和 L. Zalcman [158] 改进了 Schwick 的结果，证明了

**定理 5.1.2**　*设 $\mathcal{F}$ 是区域 $D$ 内的一族亚纯函数, $a,b,c$ 和 $d$ 是有穷复数且满足 $c\neq a$ 及 $d\neq b$. 若对于 $\mathcal{F}$ 中的任意函数 $f$, $f(z)=a \Longleftrightarrow f'(z)=b$, $f(z)=c \Longleftrightarrow f'(z)=d$, 则 $\mathcal{F}$ 在 $D$ 内正规.*

**证明**　不妨设 $D$ 是单位圆 $\Delta$. 假设 $\mathcal{F}$ 在 $\Delta$ 内不正规. 则由引理 3.1.3 $(\alpha=1)$, 存在 $f_n\in\mathcal{F}$, $z_n\in\Delta$, 和 $\rho_n\to 0^+$, 使得 $g_n(\zeta)=\rho_n^{-1}[f_n(z_n+\rho_n\zeta)-c]$ 在 $\mathbb{C}$ 上按球距内闭一致收敛到一个 $\mathbb{C}$ 上的非常数亚纯函数 $g$, 并且 $g$ 满足 $g^{\#}(\zeta)\leqslant g^{\#}(0)=|d|+1$.

我们断言

(i) $g(\zeta)=0 \Longrightarrow g'(\zeta)=d$;

(ii) $g'\neq b$;

(iii) $g$ 在 $\mathbb{C}$ 上全纯.

(i) 设 $g(\zeta_0)=0$, 则由 Hurwitz 定理知, 存在 $\zeta_n$, $\zeta_n\to\zeta_0$, 使得对于充分大的 $n$, 有 $g_n(\zeta_n)=\rho_n^{-1}[f_n(z_n+\rho_n\zeta_n)-c]=0$. 从而有 $f_n(z_n+\rho_n\zeta_n)=c$. 于是由 $f_n(\zeta)=c \Longrightarrow f_n'(\zeta)=d$, 得 $g_n'(\zeta_n)=f_n'(z_n+\rho_n\zeta_n)=d$, 故有 $g'(\zeta_0)=\lim\limits_{n\to\infty}g_n'(\zeta_n)=d$. 这就证明了 $g(\zeta)=0\Longrightarrow g'(\zeta)=d$. 于是 (i) 成立.

(ii) 设 $g'(\zeta_0)=b$, 则有 $g(\zeta_0)\neq\infty$. 显然 $g'(\zeta)\not\equiv b$, (否则 $g(\zeta)=b(\zeta-\zeta_1)$, 与 (i) 矛盾). 因此由 Hurwitz 定理, 存在 $\zeta_n$, $\zeta_n\to\zeta_0$, 使得对于充分大的 $n$, 有 $f_n'(z_n+\rho_n\zeta_n)=g_n'(\zeta_n)=b$. 由此可知 $f_n(z_n+\rho_n\zeta_n)=a$, 从而 $g_n(\zeta_n)=[f_n(z_n+\rho_n\zeta_n)-c]/\rho_n=(a-c)/\rho_n$. 于是有 $g(\zeta_0)=\lim\limits_{n\to\infty}g_n(\zeta_n)=\infty$, 矛盾. 因此 (ii) 成立.

(iii) 假如有 $g(\zeta_0)=\infty$. 由于 $g\not\equiv\infty$, 存在闭圆盘 $\overline{\Delta}(\zeta_0,\delta)=\{\zeta:|\zeta-\zeta_0|\leqslant\delta\}$, 使得当 $n$ 充分大时, 在其上 $1/g$ 和 $1/g_n$ 都全纯, 并且 $1/g_n$ 一致收敛到 $1/g$. 从而在 $\overline{\Delta}(\zeta_0,\delta)$ 上, $1/g_n(\zeta)-\rho_n/(a-c)$ 也一致收敛到 $1/g(\zeta)$. 设 $\zeta_0$ 是 $1/g$ 的 $m(\geqslant 1)$ 重零点, 则有 $(1/g)^{(m)}(\zeta_0)\neq 0$, 而且存在正数 $\delta_1(\leqslant\delta)$, 使得在 $\Delta'(\zeta_0,\delta_1)=\{\zeta:\ 0<|\zeta-\zeta_0|<\delta_1\}$ 内有

$$\left(\frac{1}{g}\right)'\neq 0,\ \left(\frac{1}{g}\right)^{(m)}\neq 0. \tag{5.1.1}$$

由于 $1/g$ 不是常数, 故由 Hurwitz 定理, 存在 $m$ 个序列 $\{\zeta_{in}\}, i=1,2,\cdots,m$, 使得 $\lim\limits_{n\to\infty}\zeta_{in}=\zeta_0$, 并且对于充分大的 $n$, 有

$$\frac{1}{g_n(\zeta_{in})}-\frac{\rho_n}{a-c}=0,\quad i=1,2,\cdots,m. \tag{5.1.2}$$

于是 $f_n(z_n+\rho_n\zeta_{in})-c=a-c$, 即 $f_n(z_n+\rho_n\zeta_{in})=a$. 从而

$$g_n'(\zeta_{in})=f_n'(z_n+\rho_n\zeta_{in})=b.$$

由此即得

$$\left(\frac{1}{g_n(\zeta)}\right)'\bigg|_{\zeta=\zeta_{in}}=-\frac{g'(\zeta_{in})}{g^2(\zeta_{in})}=-\frac{b\rho_n^2}{(a-c)^2}\neq 0\ (i=1,2,\cdots,m). \tag{5.1.3}$$

这说明

$$\zeta_{in}\neq\zeta_{jn},\quad 1\leqslant i<j\leqslant m. \tag{5.1.4}$$

于是

$$\left(\frac{1}{g_n(\zeta)}\right)'+\frac{b\rho_n^2}{(a-c)^2}$$

在 $\Delta(\zeta_0, \delta_1/2) = \{\zeta: |\zeta - \zeta_0| < \delta_1/2\}$ 内有至少 $m$ 个不同的零点. 再由 Hurwitz 定理知, $\zeta_0$ 是 $(1/g)'$ 的重级至少为 $m$ 的零点, 即有 $(1/g)^{(m)}(\zeta_0) = 0$, 矛盾. 因此 (iii) 得证.

由 (iii) 知, $g$ 是一个整函数, 于是由定理 1.3.3 知, $g$ 的级 $\leqslant 1$. 从而由 (ii) 得

$$g'(\zeta) = b + \mathrm{e}^{A\zeta+B}, \tag{5.1.5}$$

以下分两种情形考虑.

**情形 1**　$A \neq 0$. 则由 (5.1.5) 得

$$g(\zeta) = b\zeta + C + \frac{\mathrm{e}^{A\zeta+B}}{A}, \tag{5.1.6}$$

这里 $A, B, C$ 是常数.

设 $g(\zeta_0) = 0$, 则由 (i) 和 (5.1.6) 得

$$b\zeta_0 + C + \frac{\mathrm{e}^{A\zeta_0+B}}{A} = 0,$$
$$b + \mathrm{e}^{A\zeta_0+B} = d$$

于是即得

$$\zeta_0 = -\frac{1}{b}\left(C + \frac{d-b}{A}\right).$$

因此方程 $g(\zeta) = 0$ 只有一个解 $\zeta = \zeta_0$, 但由 (5.1.6) 知, $g(\zeta) = 0$ 有无穷多个解, 矛盾.

**情形 2**　$A = 0$. 则由 (i), $g'(\zeta) \equiv d$, 于是 $g(\zeta) = d(\zeta - \zeta_1)$. 从而有

$$g^{\#}(0) = \frac{|g'(0)|}{1 + |g(0)|^2} \leqslant |g'(0)| = |d|,$$

即有 $g^{\#}(0) < |d| + 1$, 与 $g^{\#}(0) = |d| + 1$ 矛盾.

所以 $\mathcal{F}$ 在 $D$ 内正规. 定理 5.1.2 得证. □

**定理 5.1.3**　*设 $b$ 是一个非零有穷复数, $\mathcal{F}$ 是区域 $D$ 内的一族亚纯函数, 其中每个函数的零点的重数至少是 $k+2$. 若对于 $\mathcal{F}$ 中的任意两个函数 $f$ 和 $g$, $f$ 和 $g$ 在 $D$ 内分担 0, $f^{(k)}$ 和 $g^{(k)}$ 在 $D$ 内分担 $b$, 则 $\mathcal{F}$ 在 $D$ 内正规.*

为了证明定理 5.1.3, 我们需要下列引理.

由定理 1.6.1 得

**引理 5.1.1**[96]　*设 $f$ 为复平面上的非常数亚纯函数, $b$ 是一个非零有穷复数, 则*

$$T(r, f) \leqslant \overline{N}(r, f) + N\left(r, \frac{1}{f}\right) + \overline{N}\left(r, \frac{1}{f^{(k)} - b}\right) + S(r, f). \tag{5.1.7}$$

**引理 5.1.2**[96] 设 $f$ 为复平面上的非常数亚纯函数, $b$ 是一个非零有穷复数, 则

$$\overline{N}(r,f)\leqslant\left(1+\frac{1}{k}\right)N\left(r,\frac{1}{f}\right)+\left(1+\frac{2}{k}\right)\overline{N}\left(r,\frac{1}{f^{(k)}-b}\right)+S(r,f). \tag{5.1.8}$$

**引理 5.1.3** 设 $f$ 为复平面上的非常数亚纯函数, $b$ 是一个非零有穷复数, $l$ 为一正整数, 满足 $l>k+4+2/k$. 若 $f\neq 0$ 且 $f^{(k)}-b$ 的零点重级至少为 $l$, 则 $f$ 为常数.

**证明** 由于 $f\neq 0$ 且 $f^{(k)}-b$ 的零点重级至少为 $l$, 则由 (5.1.8) 式得

$$\begin{aligned}\overline{N}(r,f)&\leqslant\left(1+\frac{2}{k}\right)\overline{N}\left(r,\frac{1}{f^{(k)}-b}\right)+S(r,f)\\&\leqslant\frac{1+2/k}{l}N\left(r,\frac{1}{f^{(k)}-b}\right)+S(r,f)\\&\leqslant\frac{1+2/k}{l}T\left(r,f^{(k)}\right)+S(r,f)\\&\leqslant\frac{1+2/k}{l}[T(r,f)+k\overline{N}(r,f)]+S(r,f).\end{aligned} \tag{5.1.9}$$

于是由 (5.1.9) 式得

$$\overline{N}(r,f)\leqslant\frac{k+2}{k(l-k-2)}T(r,f)+S(r,f). \tag{5.1.10}$$

由 (5.1.7) 式, 并结合 $f\neq 0$ 以及 $f^{(k)}-b$ 的零点重级至少为 $l$ 可得

$$\begin{aligned}T(r,f)&\leqslant\overline{N}(r,f)+\overline{N}\left(r,\frac{1}{f^{(k)}-b}\right)+S(r,f)\\&\leqslant\overline{N}(r,f)+\frac{1}{l}N\left(r,\frac{1}{f^{(k)}-b}\right)+S(r,f)\\&\leqslant\overline{N}(r,f)+\frac{1}{l}T(r,f^{(k)})+S(r,f)\\&\leqslant\overline{N}(r,f)+\frac{1}{l}[T(r,f)+k\overline{N}(r,f)]+S(r,f)\\&\leqslant\left(1+\frac{k}{l}\right)\overline{N}(r,f)+\frac{1}{l}T(r,f)+S(r,f).\end{aligned} \tag{5.1.11}$$

于是即得

$$T(r,f)\leqslant\frac{l+k}{l-1}\overline{N}(r,f)+S(r,f). \tag{5.1.12}$$

由 (5.1.10) 和 (5.1.12) 得

$$T(r,f) \leqslant \frac{(k+2)(l+k)}{k(l-1)(l-k-2)} T(r,f) + S(r,f),$$

即

$$[k(l-1)(l-k-2)-(k+2)(l+k)]T(r,f) \leqslant S(r,f).$$

由 $l > k+4+2/k$, 得 $k(l-1)(l-k-2)-(k+2)(l+k) > 0$. 于是即得 $T(r,f) = S(r,f)$, 因此 $f$ 为常数.

由 Hayman 不等式得

**引理 5.1.4** *设 $f$ 为复平面上的非常数亚纯函数, $b$ 为非零复数, $k$ 为一正整数, 则 $f$ 或 $f^{(k)}-b$ 有零点; 若 $f$ 为超越亚纯函数, 则 $f$ 或 $f^{(k)}-b$ 有无穷多个零点.*

**定理 5.1.3 的证明** 设 $z_0 \in D$. 下面证 $\mathcal{F}$ 在 $z_0$ 处正规. 设 $f \in \mathcal{F}$. 以下分两种情形.

**情形 1** $f^{(k)}(z_0) \neq b$. 则存在圆盘 $\Delta(z_0,\delta) = \{z: |z-z_0| < \delta\}$ 使得在 $\Delta(z_0,\delta)$ 内 $f^{(k)} \neq b$. 由定理的条件知, 对任意的 $g \in \mathcal{F}$, $g$ 的零点重级 $\geqslant k+2$ 且 $g^{(k)} \neq b$. 于是由定理 4.2.1 知, $\mathcal{F}$ 在 $\Delta(z_0,\delta)$ 内正规. 所以 $\mathcal{F}$ 在 $z_0$ 处正规.

**情形 2** $f^{(k)}(z_0) = b$, 由定理的条件知, $f(z_0) \neq 0$. 因此存在圆盘 $\Delta(z_0,\delta) = \{z: |z-z_0| < \delta\}$, 使得在 $\Delta(z_0,\delta)$ 内 $f \neq 0$ 且在 $\Delta'(z_0,\delta) = \{z: 0 < |z-z_0| < \delta\}$ 内 $f^{(k)} \neq b$. 由定理 4.2.1 知, $\mathcal{F}$ 在 $\Delta'(z_0,\delta)$ 内正规. 下面用杨乐 [206] 的方法证明 $\mathcal{F}$ 在 $z_0$ 处正规.

设 $\{f_n\}$ 为 $\mathcal{F}$ 内的任意函数列, 则存在子列, 仍记为 $\{f_n\}$, 使得 $\{f_n\}$ 在 $\Delta'(z_0,\delta)$ 内按球距内闭一致收敛于一个函数 $h$. 下面再分两种情形讨论.

**情形 2.1** $h \not\equiv 0$. 若 $h \not\equiv \infty$, 则由 Hurwitz 定理知, 在 $\Delta'(z_0,\delta)$ 内 $h \neq 0$. 于是有

$$\min_{0\leqslant\theta\leqslant 2\pi} \left| h\left(z_0 + \frac{\delta}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right) \right| > A > 0,$$

其中 $A$ 为常数.

因此对于充分大的 $n$ 有

$$\min_{0\leqslant\theta\leqslant 2\pi} \left| f_n\left(z_0 + \frac{\delta}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right) \right| > \frac{A}{2} > 0.$$

由于 $f_n$ 是亚纯函数且在 $\Delta(z_0,\delta)$ 内 $f_n \neq 0$, 所以 $1/f_n$ 在 $\Delta(z_0,\delta)$ 内是全纯函数. 因此 $1/f_n$ 在 $\overline{\Delta}(z_0,\delta/2) = \{z: |z-z_0| \leqslant \delta/2\}$ 内是全纯函数, 且

$$\max_{0\leqslant\theta\leqslant 2\pi} \frac{1}{\left| f_n\left(z_0 + \frac{\delta}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right) \right|} < \frac{2}{A}.$$

由最大模原理得

$$\max_{|z-z_0|\leqslant\frac{\delta}{2}}\frac{1}{|f_n(z)|}<\frac{2}{A},$$

于是有

$$\min_{|z-z_0|\leqslant\frac{\delta}{2}}|f_n(z)|>\frac{A}{2}>0.$$

因此存在 $\{f_n\}$ 的子列在 $\Delta(z_0,\delta/2)$ 内按球距内闭一致收敛到一个函数.

若 $h\equiv\infty$, 则 $\{f_n\}$ 在 $\Delta'(z_0,\delta)$ 内按球距内闭一致收敛到 $\infty$. 所以 $\{f_n\}$ 在 $\{z:\ |z-z_0|=\delta/2\}$ 上按球距一致收敛到 $\infty$. 于是对于任意大的正数 $M$, 当 $n$ 充分大时有

$$\min_{0\leqslant\theta\leqslant 2\pi}\left|f_n\left(z_0+\frac{\delta}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right)\right|>M>0.$$

以下与前面一样讨论可知, 存在 $\{f_n\}$ 的一个子列在 $\Delta(z_0,\delta/2)$ 内按球距内闭一致收敛到一个函数.

**情形 2.2** $h\equiv 0$. 则 $\{f_n\}$ 在 $\Delta'(z_0,\delta)$ 内内闭一致收敛于 0. 因此 $\{f_n^{(k)}\}$ 和 $\{f_n^{(k+1)}\}$ 在 $\Delta'(z_0,\delta)$ 内也内闭一致收敛于 0. 所以对于充分大的 $n$, 由辐角原理得

$$\begin{aligned}&\left|N\left(\frac{\delta}{2},z_0,f_n^{(k)}-b\right)-N\left(\frac{\delta}{2},z_0,\frac{1}{f_n^{(k)}-b}\right)\right|\\=&\left|\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{|z-z_0|=\frac{\delta}{2}}\frac{f_n^{(k+1)}(z)}{f_n^{(k)}(z)-b}\mathrm{d}z\right|<1.\end{aligned}\tag{5.1.13}$$

于是有

$$N\left(\frac{\delta}{2},z_0,f_n^{(k)}-b\right)=N\left(\frac{\delta}{2},z_0,\frac{1}{f_n^{(k)}-b}\right).$$

因为 $f_n^{(k)}-b$ 的极点重级为 $\geqslant k+1$, 所以 $z_0$ 为 $f_n^{(k)}-b$ 的重级为 $\geqslant k+1$ 的零点.

以下再分两种情形讨论.

**情形 2.2.1** 存在无穷多个 $n$, 使得 $f_n^{(k)}-b$ 在 $z_0$ 处的零点重级大于 $k+4+2/k$, 记这样的 $n$ 组成的集合为 $S$.

令 $G=\{f_n:n\in S\}$, 则 $G$ 在 $\Delta(z_0,\delta/2)$ 内是正规的.

事实上, 假设 $G$ 在 $\Delta(z_0,\delta/2)$ 内不正规, 则由引理 3.1.3 知, 存在 $f_n\in G$, $z_n\in\Delta(z_0,\delta/2)$, 和 $\rho_n\to 0^+$, 使得 $g_n(\xi)=\rho_n^{-k}f_n(z_n+\rho_n\xi)$ 在复平面 $\mathbb{C}$ 上按球距内闭一致收敛于一个非常数亚纯函数 $g$.

由 Hurwitz 定理知, $g \neq 0$ 且 $g^{(k)} - b$ 的零点重级大于 $k+4+2/k$. 于是由引理 5.3 知, $g$ 为常数, 矛盾. 所以存在 $\{f_n\}$ 的子列在 $\Delta(z_0, \delta/2)$ 内按球距内闭一致收敛到一个函数.

**情形 2.2.2** 存在无穷多个 $n$ 使得 $f_n^{(k)} - b$ 在 $z_0$ 处的零点重级 $l$ 满足 $k+1 \leqslant l \leqslant k+4+2/k$, 记这样的 $n$ 所组成的集合为 $S_l$.

令 $G = \{f_n : n \in S_l\}$, 则 $G$ 在 $\Delta(z_0, \delta/2)$ 内正规.

事实上, 假设 $G$ 在 $\Delta(z_0, \delta/2)$ 内不正规, 则由引理 3.1.3 知, 存在 $f_n \in G$, $z_n \in \Delta(z_0, \delta/2)$, 和 $\rho_n \to 0^+$, 使得 $g_n(\xi) = \rho_n^{-k} f_n(z_n + \rho_n \xi)$ 在复平面 $\mathbb{C}$ 上按球距内闭一致收敛于一个非常数亚纯函数 $g(\xi)$.

由 Hurwitz 定理知, $g \neq 0$ 且 $g^{(k)} - b$ 的零点重级至少为 $l$. 于是由引理 5.1.4 知, $g^{(k)} - b$ 有零点. 我们断言 $g^{(k)} - b$ 仅有一个零点. 假设 $\xi_1$ 和 $\xi_2$ 为 $g^{(k)} - b$ 的两个不同的零点, 则 $g^{(k)} - b$ 在 $\xi_1$ 和 $\xi_2$ 处的重级至少为 $l$. 设 $\gamma$ 为包含 $\xi_1$ 和 $\xi_2$ 在其内部的简单闭曲线, 且 $g$ 在 $\gamma$ 上没有零点, 在 $\gamma$ 上和它的内部没有极点, 则在 $\gamma$ 上和它的内部, $g_n(\xi)$ 一致收敛于 $g(\xi)$, 且 $g_n^{(k)} - b$ 一致收敛于 $g^{(k)} - b$. 由辐角原理知, 当 $n$ 充分大时, $g_n^{(k)} - b$ 和 $g^{(k)} - b$ 在 $\gamma$ 内部有相同的零点 (计算重级). 但当 $n$ 充分大时, $g_n^{(k)} - b$ 仅有 $l$ 个零点, 而 $g^{(k)}$ 至少有 $2l$ 个零点, 矛盾.

所以 $g^{(k)} - b$ 仅有一个零点, 其重级为 $l$. 由于 $f_n^{(k)}(z_n + \rho_n \xi) = g_n^{(k)}(\xi)$, 且在去掉 $g$ 的极点的区域内内闭一致收敛于 $g^{(k)}(\xi)$. 故由 (5.1.13) 后面的式子知, 在 $\Delta(z_0, \delta/2)$ 内 $f_n^{(k)}$ 有 $l$ 个极点 (计算重级). 因此在 $\{\xi : z_n + \rho_n \xi \in \Delta(z_0, \delta/2)\}$ 内, $g_n^{(k)}$ 有 $l$ 个极点 (计算重级). 故由辐角原理知, 在复平面 $\mathbb{C}$ 上 $g^{(k)}$ 至多有 $l$ 个极点 (计算重级).

于是有

(i) $g \neq 0$;

(ii) $g^{(k)} - b$ 仅有一个不同的零点, 其重级为 $l$;

(iii) $g^{(k)}$ 至多有 $l$ 个极点 (计算重级).

我们断言不存在函数满足以上三个条件.

事实上, 由引理 5.1.4 知, 不存在超越函数满足 (i) 和 (ii). 显然, $g$ 也不可能是多项式. 下面证明不存在非多项式的有理函数满足 (i), (ii) 和 (iii). 以下分两种情形讨论.

**情形 2.2.2.1** $k \geqslant 3$. 由于 $k+1 \leqslant l \leqslant k+4+2/k$, 所以 $g$ 只有一个不同的极点. 因此

$$g(\xi) = \frac{A}{(\xi - a_1)^m},$$

其中 $A$ 为非零常数, $a_1$ 为常数, $m$ 为正整数.

显然, $g^{(k)} - b$ 有 $m + k$ 个不同的零点, 与 (ii) 矛盾.

**情形 2.2.2.2** $k=2$. 则 $3\leqslant l\leqslant 7$, 于是 $g$ 具有如下形式:

(1) $g(\xi)=A/(\xi-a_1)(\xi-a_2)^2,\ l=7$;

(2) $g(\xi)=A/(\xi-a_1)(\xi-a_2),\ l=6$;

(3) $g(\xi)=A/(\xi-a_1)^m,\ l=m+2,\ 1\leqslant m\leqslant 5$,

其中 $A$ 为非零常数, $a_1$ 和 $a_2$ 为两个不同的常数, $m$ 为正整数.

若 $g(\xi)=A/[(\xi-a_1)(\xi-a_2)^2]$, 则

$$\begin{aligned}g''(\xi)-b &= -\frac{A[3(\xi-a_1)(\xi-a_2)-(3\xi-2a_1-a_2)(5\xi-3a_1-2a_2)]}{(\xi-a_1)^3(\xi-a_2)^4}\\ &\quad -\frac{b(\xi-a_1)^3(\xi-a_2)^4}{(\xi-a_1)^3(\xi-a_2)^4}.\end{aligned}$$

因为 $g''-b$ 仅有一个不同的零点, 所以有

$$\begin{aligned}&A[3(\xi-a_1)(\xi-a_2)-(3\xi-2a_1-a_2)(5\xi-3a_1-2a_2)]\\ &+b(\xi-a_1)^3(\xi-a_2)^4=b(\xi-c)^7.\end{aligned}\tag{5.1.14}$$

对式 (5.1.14) 两边求三阶导数得

$$(\xi-a_2)p(\xi)=210b(\xi-c)^4,\tag{5.1.15}$$

其中 $p$ 为一多项式, $c$ 为一常数.

于是得 $a_2=c$. 故由 (5.1.14) 得, $a_1=a_2$, 矛盾.

若 $g$ 具有 (2) 或 (3) 的形式, 我们可以类似地得到矛盾.

**情形 2.2.2.3** $k=1$. 则 $2\leqslant l\leqslant 7$, 于是 $g$ 具有如下形式:

(1) $g(\xi)=A/(\xi-a_1)(\xi-a_2)(\xi-a_3)^2,\ l=7$;

(2) $g(\xi)=A/(\xi-a_1)(\xi-a_2)(\xi-a_3),\ l=6$;

(3) $g(\xi)=A/(\xi-a_1)^2(\xi-a_2)^m,\ l=m+4,\ 2\leqslant m\leqslant 3$;

(4) $g(\xi)=A/(\xi-a_1)(\xi-a_2)^m,\ l=m+3,\ 1\leqslant m\leqslant 4$;

(5) $g(\xi)=A/(\xi-a_1)^m,\ l=m+1,\ 1\leqslant m\leqslant 6$,

其中 $A$ 为非零常数, $a_1$, $a_2$ 和 $a_3$ 为三个不同的常数, $m$ 为正整数.

若 $g(\xi)=A/[(\xi-a_1)(\xi-a_2)(\xi-a_3)^2]$, 则

$$\begin{aligned}g'(\xi)-b= &\ -\frac{A[(2\xi-a_1-a_2)(\xi-a_3)+2(\xi-a_1)(\xi-a_2)]}{(\xi-a_1)^2(\xi-a_2)^2(\xi-a_3)^3}\\ &\ -\frac{b(\xi-a_1)^2(\xi-a_2)^2(\xi-a_3)^3}{(\xi-a_1)^2(\xi-a_2)^2(\xi-a_3)^3}.\end{aligned}$$

由于 $g'-b$ 仅有一个不同的零点, 所以有

$$\begin{aligned}&A[(2\xi-a_1-a_2)(\xi-a_3)+2(\xi-a_1)(\xi-a_2)]+b(\xi-a_1)^2(\xi-a_2)^2(\xi-a_3)^3\\ &=b(\xi-c)^7.\end{aligned}\tag{5.1.16}$$

对 (5.1.16) 式两边求导得

$$
\begin{aligned}
&b(\xi-a_1)(\xi-a_2)(\xi-a_3)^2[2(2\xi-a_1-a_2)(\xi-a_3)+3(\xi-a_1)(\xi-a_2)]\\
&\quad+A(8\xi-3a_1-3a_2-2a_3)=7b(\xi-c)^6. \qquad (5.1.17)
\end{aligned}
$$

在 (5.1.17) 式中令 $\xi=a_3$ 得

$$3A(2a_3-a_1-a_2)=7b(a_3-c)^6. \qquad (5.1.18)$$

对 (5.1.17) 式两边求导得

$$8A+(\xi-a_3)p(\xi)=42b(\xi-c)^5, \qquad (5.1.19)$$

其中 $p$ 为一多项式.

在 (5.1.19) 式中令 $\xi=a_3$ 得

$$8A=42b(a_3-c)^5. \qquad (5.1.20)$$

于是由 (5.1.18) 和 (5.1.20) 式得

$$c=-\frac{7}{2}a_3+\frac{9}{4}a_1+\frac{9}{4}a_2. \qquad (5.1.21)$$

另一方面, 对 (5.1.16) 式两边求六阶导数, 并令 $\xi=c$ 得

$$c=\frac{2a_1+2a_2+3a_3}{7}. \qquad (5.1.22)$$

比较 (5.1.21) 和 (5.1.22) 式, 得 $a_3=c$, 由 (5.1.20) 得 $A=0$, 与 $A\neq0$ 矛盾.

若 $g$ 具有其他的形式, 我们可以类似地得矛盾.

于是 $\{f_n\}$ 在 $\Delta(z_0,\delta/2)$ 内正规. 因此, 存在 $\{f_n\}$ 的子列在 $\Delta(z_0,\delta/2)$ 内按球距内闭一致收敛. 因此 $\mathcal{F}$ 在 $z_0$ 处正规, 于是 $\mathcal{F}$ 在 $D$ 内正规. 定理 5.1.3 得证. □

类似地, 我们不难证得如下结果.

**定理 5.1.4** 设 $b$ 是一个非零有穷复数, $\mathcal{F}$ 是区域 $D$ 内的一族亚纯函数, 其中每个函数的零点的重数至少是 $k+1$, 极点都是重级极点. 若对于 $\mathcal{F}$ 中的任意两个函数 $f$, $g$, $f$, $g$ 在 $D$ 内分担 0, $f^{(k)}$, $g^{(k)}$ 在 $D$ 内分担 $b$, 则 $\mathcal{F}$ 在 $D$ 内正规.

**推论 1** 设 $b$ 是一个非零有穷复数, $\mathcal{F}$ 是区域 $D$ 内的一族全纯函数, 其中每个函数的零点的重数至少是 $k+1$. 若对于 $\mathcal{F}$ 中的任意两个函数 $f$, $g$, $f$, $g$ 在 $D$ 内分担 0, $f^{(k)}$, $g^{(k)}$ 在 $D$ 内分担 $b$, 则 $\mathcal{F}$ 在 $D$ 内正规.

**推论 2** 设 $b$ 是一个非零有穷复数, $\mathcal{F}$ 是区域 $D$ 内的一族亚纯函数. 若对于 $\mathcal{F}$ 中的任意两个函数 $f$, $g$, $f$, $g$ 在 $D$ 内分担 0, $f^mf'$, $g^mg'$ 在 $D$ 内分担 $b$, 则 $\mathcal{F}$ 在 $D$ 内正规.

下面例子说明, 定理 5.1.3 的条件 ($\mathcal{F}$ 中每个函数的零点的重数至少是 $k+2$) 是最佳的.

**例 5.1** 设 $n,k$ 是正整数, $D=\{z:|z|<1\}$, $\mathcal{F}=\{f_n\}$, 其中

$$f_n(z)=\frac{nz^{k+1}}{k!(nz-1)},\qquad n=1,2,3,\cdots$$

则 $\mathcal{F}$ 中的每个函数具有一个重数为 $k+1$ 的零点. 显然, 对于任意一对正整数 $m$, $n$, $f_m$, $f_n$ 在 $D$ 内分担 0. 由于

$$f_n(z)=\frac{1}{k!}\left(z^k+\frac{1}{n}z^{k-1}+\cdots+\frac{1}{n^{k-1}}z+\frac{1}{n^k}+\frac{1}{n^k}\frac{1}{nz-1}\right),$$

于是即得

$$f_n^{(k)}(z)=1+\frac{(-1)^k}{(nz-1)^{k+1}}\neq 1.$$

这样 $f_m^{(k)}$, $f_n^{(k)}$ 在 $D$ 内分担 1. 但是 $\mathcal{F}$ 在 0 的任何邻域内不正规.

与本节内容相关的结果可参看文献 [74], [75], [76], [78], [103].

## 5.2 分担一个值的亚纯函数族

方明亮和 L. Zalcman[74] 考虑分担一个值的情形, 证明了

**定理 5.2.1** *设 $\mathcal{F}$ 是区域 $D$ 内的一族亚纯函数, $k$ 是一个正整数, $a\neq 0$ 和 $b$ 是两个有穷复数. 若对于 $\mathcal{F}$ 中的任意函数 $f$, $f$ 的零点的重数至少是 $k$, $f(z)f^{(k)}(z)=a\iff f^{(k)}(z)=b$, 则 $\mathcal{F}$ 在 $D$ 内正规.*

**证明** 不妨设 $D=\{z:\ |z|<1\}$. 假设 $\mathcal{F}$ 在 $D$ 内不正规. 则由引理 3.1.3 知, 存在 $f_n\in\mathcal{F}$, $z_n\in D$, 和 $\rho_n\to 0^+$, 使得 $g_n(\zeta)=\rho_n^{-k/2}f_n(z_n+\rho_n\zeta)$ 在复平面 $\mathbb{C}$ 上按球距内闭一致收敛于非常数亚纯函数 $g$, 且它的球面导数有界, 因而其级至多为 2. 由 Hurwitz 定理知, $g$ 的零点重级至少为 $k$.

我们断言: (i) $gg^{(k)}\neq a$; (ii) $g^{(k)}\neq 0$.

(i) 假设 $g(\zeta_0)g^{(k)}(\zeta_0)=a$, 则 $g(\zeta_0)\neq\infty$. 若 $gg^{(k)}\equiv a$, 则 $g$ 为整函数, 且 $g\neq 0$. 于是由定理 1.3.3 知, $g$ 的级至多为 1. 所以 $g(\zeta)=\mathrm{e}^{c\zeta+d}$, 其中 $c(\neq 0)$, $d$ 为常数, 但 $g(\zeta)g^{(k)}(\zeta)=c^k\mathrm{e}^{2c\zeta+2d}$, 矛盾. 所以 $gg^{(k)}\not\equiv a$. 因此存在 $\zeta_n$, $\zeta_n\to\zeta_0$, 使得当 $n$ 充分大时有

$$a=g_n(\zeta_n)g_n^{(k)}(\zeta_n)=f_n(z_n+\rho_n\zeta_n)f_n^{(k)}(z_n+\rho_n\zeta_n).$$

于是有 $f_n^{(k)}(z_n+\rho_n\zeta_n)=b$, $g_n^{(k)}(\zeta_n)=\rho_n^{k/2}f_n^{(k)}(z_n+\rho_n\zeta_n)=\rho_n^{k/2}b$. 所以 $g^{(k)}(\zeta_0)=\lim\limits_{n\to\infty}g_n^{(k)}(\zeta_n)=0$, 与 $g(\zeta_0)g^{(k)}(\zeta_0)=a(\neq 0)$ 矛盾. 所以 (i) 成立.

(ii) 假如 $g^{(k)}(\zeta_0)=0$, 则 $g(\zeta_0)\neq\infty$. 若 $g^{(k)}\equiv 0$, 则 $g$ 是次数小于 $k$ 的多项式, 这与 $g$ 的零点重级至少为 $k$ 矛盾. 所以 $g^{(k)}\not\equiv 0$. 由于 $g_n^{(k)}(\zeta)-\rho_n^{k/2}b\to g^{(k)}(\zeta)$, 且 $g^{(k)}\not\equiv 0$, 所以存在 $\zeta_n$, $\zeta_n\to\zeta_0$, 使得当 $n$ 充分大时有

$$g_n^{(k)}(\zeta_n)-\rho_n^{k/2}b=0,$$

即有

$$f_n^{(k)}(z_n+\rho_n\zeta_n)=b.$$

由于 $f_n^{(k)}(z)=b\Longrightarrow f_n(z)f_n^{(k)}(z)=a$, 所以有 $f_n(z_n+\rho_n\zeta_n)f_n^{(k)}(z_n+\rho_n\zeta_n)=a$. 从而 $g_n(\zeta_n)g_n^{(k)}(\zeta_n)=f_n(z_n+\rho_n\zeta_n)f_n^{(k)}(z_n+\rho_n\zeta_n)=a$. 但 $\lim\limits_{n\to\infty}g_n(\zeta_n)g_n^{(k)}(\zeta_n)=g(\zeta_0)g^{(k)}(\zeta_0)\neq a$, 矛盾. 所以 (ii) 成立.

假设 $g$ 为超越亚纯函数. 当 $k=1$ 时, 则由定理 3.3.3 知, $gg'-a$ 有无穷个解, 矛盾. 下面考虑 $k\geqslant 2$ 的情形. 由 Nevanlinna 第二基本定理得

$$\begin{aligned}T(r,gg^{(k)})&\leqslant\overline{N}(r,g)+\overline{N}\left(r,\frac{1}{gg^{(k)}}\right)+\overline{N}\left(r,\frac{1}{gg^{(k)}-a}\right)+S(r,g)\\&\leqslant\overline{N}(r,g)+\overline{N}\left(r,\frac{1}{g}\right)+S(r,g),\end{aligned}\tag{5.2.1}$$

其中 $S(r,g)=o(T(r,g))$.

另一方面, 由 Nevanlinna 第一基本定理得

$$\begin{aligned}T(r,gg^{(k)})&\geqslant\frac{1}{2}\left[N(r,gg^{(k)})+N\left(r,\frac{1}{gg^{(k)}}\right)\right]+O(1)\\&\geqslant\frac{k+2}{2}\overline{N}(r,g)+\overline{N}\left(r,\frac{1}{g}\right)+S(r,g).\end{aligned}\tag{5.2.2}$$

于是由 (5.2.1) 和 (5.2.2) 得

$$\overline{N}(r,g)=S(r,g).\tag{5.2.3}$$

由对数导数引理得

$$\begin{aligned}m\left(r,\frac{1}{g^2}\right)&=m\left(r,\frac{g^{(k)}}{g}\frac{1}{gg^{(k)}}\right)\\&\leqslant m\left(r,\frac{g^{(k)}}{g}\right)+m\left(r,\frac{1}{gg^{(k)}}\right)\\&\leqslant m\left(r,\frac{1}{gg^{(k)}}\right)+S(r,g),\end{aligned}$$

所以由引理 1.4.2 证明中的 (1.4.4) 得

$$
\begin{aligned}
& m\left(r,\frac{1}{g^2}\right)+m\left(r,\frac{1}{gg^{(k)}-a}\right)\\
\leqslant & m\left(r,\frac{1}{gg^{(k)}}\right)+m\left(r,\frac{1}{gg^{(k)}-a}\right)+S(r,g)\\
\leqslant & m\left(r,\frac{1}{gg^{(k)}}+\frac{1}{gg^{(k)}-a}\right)+S(r,g)\\
\leqslant & m\left(r,\left[\frac{(gg^{(k)})'}{gg^{(k)}}+\frac{(gg^{(k)'}-a)'}{gg^{(k)}-a}\right]\frac{1}{(gg^{(k)})'}\right)+S(r,g)\\
\leqslant & m\left(r,\frac{1}{(gg^{(k)})'}\right)+S(r,g)\\
\leqslant & T(r,(gg^{(k)})')-N\left(r,\frac{1}{(gg^{(k)})'}\right)+S(r,g)\\
\leqslant & \overline{N}(r,g)+T(r,gg^{(k)})-N\left(r,\frac{1}{(gg^{(k)})'}\right)+S(r,g).
\end{aligned} \tag{5.2.4}
$$

于是由 Nevanlinna 第一基本定理即得

$$
\begin{aligned}
2T(r,g)\leqslant & \overline{N}(r,g)+N\left(r,\frac{1}{g^2}\right)+N\left(r,\frac{1}{gg^{(k)}-a}\right)-N\left(r,\frac{1}{(gg^{(k)})'}\right)+S(r,g)\\
\leqslant & \overline{N}(r,g)+(k+1)\overline{N}\left(r,\frac{1}{g}\right)+\overline{N}\left(r,\frac{1}{gg^{(k)}-a}\right)+S(r,g).
\end{aligned} \tag{5.2.5}
$$

因为 $gg^{(k)}-a\neq 0$, $g$ 的零点重级至少为 $k(\geqslant 2)$, 所以由 (5.2.3) 和 (5.2.5) 得

$$
\begin{aligned}
2T(r,g)\leqslant & \frac{k+1}{k}N\left(r,\frac{1}{g}\right)+S(r,g)\leqslant \frac{3}{2}N\left(r,\frac{1}{g}\right)+S(r,g)\\
\leqslant & \frac{3}{2}T\left(r,\frac{1}{g}\right)+S(r,g)\leqslant \frac{3}{2}T(r,g)+S(r,g),
\end{aligned}
$$

于是即得 $T(r,g)=S(r,g)$, 矛盾. 因此 $g$ 为有理函数.

若 $g$ 是非多项式有理函数, 则有

$$
g(\zeta)=a_n\zeta^n+a_{n-1}\zeta^{n-1}+\cdots+a_1\zeta+a_0+\frac{q(\zeta)}{p(\zeta)}, \tag{5.2.6}
$$

其中 $a_0,a_1,\cdots,a_n$ 为常数且满足 $a_n\neq 0$, $p$ 和 $q$ 为满足 $\deg q<\deg p$ 的互素的多项式, 且有 $\deg p\geqslant 1$, $q(\zeta)\neq 0$.

若 $n \geqslant k$, 则

$$g^{(k)}(\zeta) = a_n n(n-1)\cdots(n-k+1)\zeta^{n-k} + \cdots + a_k k! + \frac{q_k(\zeta)}{p_k(\zeta)}, \tag{5.2.7}$$

其中 $p_k(\zeta)$ 和 $q_k(\zeta)$ 为互素的多项式.

由归纳法, 易得 $\deg q_k < \deg p_k$. 于是由 (5.2.7), 得 $g^{(k)}(\zeta) = 0$ 有解, 与 $g^{(k)}(\zeta) \neq 0$ 矛盾. 所以 $n < k$, 于是有

$$g(\zeta) = a_l\zeta^l + a_{l-1}\zeta^{l-1} + \cdots + a_1\zeta + a_0 + \frac{q(\zeta)}{p(\zeta)}, (l \leqslant k-1, a_l \neq 0), \tag{5.2.8}$$

$$g^{(k)}(\zeta) = \frac{q_k(\zeta)}{p_k(\zeta)}. \tag{5.2.9}$$

因为 $g^{(k)}(\zeta) \neq 0$, 所以 $q_k$ 为一非零常数, 记为 $A$. 于是有

$$g^{(k)}(\zeta) = \frac{A}{p_k(\zeta)}.$$

由 $\deg p \geqslant 1$ 知, $g$ 必有有穷极点. 所以 $g^{(k)}$ 有重级至少 $k+1$ 的有穷极点. 于是即得 $\deg p_k \geqslant k+1$. 所以

$$\begin{aligned} g(\zeta)g^{(k)}(\zeta) &= \left(a_l\zeta^l + a_{l-1}\zeta^{l-1} + \cdots + a_1\zeta + a_0 + \frac{q(\zeta)}{p(\zeta)}\right)\frac{A}{p_k(\zeta)} \\ &= A\frac{(a_l\zeta^l + a_{l-1}\zeta^{l-1} + \cdots + a_1\zeta + a_0)p(\zeta) + q(\zeta)}{p(\zeta)p_k(\zeta)}. \end{aligned}$$

因此 $g(\zeta)g^{(k)}(\zeta) = a$ 有解, 与 $g(\zeta)g^{(k)}(\zeta) \neq a$ 矛盾. 所以 $g$ 为多项式. 但由于 $g^{(k)}(\zeta) \neq 0$, $g$ 的零点重级 $\geqslant k$, 于是有 $g(\zeta) = c_1(\zeta - c_2)^k$, 其中 $c_1 \neq 0$. 因此 $g(\zeta)g^{(k)}(\zeta) - a = 0$ 有解, 矛盾. 所以 $\mathcal{F}$ 在 $D$ 内正规. □

下面两个例子说明定理 5.2.1 中的条件 $a \neq 0$ 是必需的.

**例 5.2**　设 $D = \{z : |z| < 1\}$, $\mathcal{F} = \{f_n\}$, 其中 $f_n(z) = \mathrm{e}^{nz}$, 则 $f_n(z)f_n^{(k)}(z) = n^k\mathrm{e}^{2nz}$. 显然, $f_n(z)f_n^{(k)}(z) = 0 \Longleftrightarrow f_n^{(k)}(z) = 0$, 但是 $\mathcal{F}$ 在 $D$ 内不正规.

**例 5.3**　设 $D = \{z : |z| < 1\}$, $\mathcal{F} = \{f_n\}$, 其中 $f_n(z) = \mathrm{e}^{nz} - 1/n$, 则 $f_n'(z) = n\mathrm{e}^{nz}$, $f_n(z)f_n'(z) = n(\mathrm{e}^{nz} - 1/n)\mathrm{e}^{nz}$. 于是即得 $f_n(z)f_n'(z) = 0 \Longleftrightarrow f_n'(z) = 1$, 但是 $\mathcal{F}$ 在 $D$ 内不正规.

方明亮和 L. Zalcman [75], 叶亚盛和庞学诚 [215] 证明了

**定理 5.2.2**　*设 $\mathcal{F}$ 是区域 $D$ 内的一族亚纯函数, $a, b$ 是两个非零有穷复数, $k$ 是一个正整数. 若对于 $\mathcal{F}$ 中的任意函数 $f$, $f$ 的零点的重数至少为 $k+1$, $f(z) = a \Longleftrightarrow f^{(k)}(z) = b$, 则 $\mathcal{F}$ 在 $D$ 内正规.*

**证明**　不妨设 $D = \Delta$ 为单位圆. 假设 $\mathcal{F}$ 在 $\Delta$ 内不正规, 则由引理 3.1.3 知, 存在 $f_n \in \mathcal{F}$, $z_n \in \Delta$, $\rho_n \to 0^+$, 使得 $g_n(\zeta) = \rho_n^{-k} f_n(z_n + \rho_n\zeta)$ 在复平面 $\mathbb{C}$ 上按球

距内闭一致收敛于一个非常数亚纯函数 $g$, 且 $g$ 的零点重级至少为 $k+1$.

我们断言 (i) $g^{(k)} \neq b$; (ii) $g$ 没有单重极点.

(i) 设 $g^{(k)}(\zeta_0) = b$, 则 $g^{(k)} \not\equiv b$. 否则 $g$ 为 $k$ 次多项式, 这与 $g$ 的零点重级 $\geqslant k+1$ 矛盾. 由于 $g^{(k)}(\zeta_0) = b$ 且 $g^{(k)} \not\equiv b$, 故由 Hurwitz 定理知, 存在 $\zeta_n$, $\zeta_n \to \zeta_0$, 使得当 $n$ 充分大时, $f_n^{(k)}(z_n + \rho_n\zeta_n) = g_n^{(k)}(\zeta_n) = b$. 由于 $f_n(z_n + \rho_n\zeta_n) = a$, 从而

$$g_n(\zeta_n) = \frac{f_n(z_n + \rho_n\zeta_n)}{\rho_n^k} = \frac{a}{\rho_n^k}.$$

于是有 $g(\zeta_0) = \lim_{n\to\infty} g_n(\zeta_n) = \infty$, 这与 $g^{(k)}(\zeta_0) = b$ 矛盾. 所以 (i) 成立.

(ii) 设 $g(\zeta_0) = \infty$. 由于 $g \not\equiv \infty$, 则存在闭圆 $\overline{\Delta}(\zeta_0, \delta)$, 使得当 $n$ 充分大时, $1/g$ 和 $1/g_n$ 在圆上全纯, 且 $1/g_n$ 一致收敛于 $1/g$. 所以在 $\overline{\Delta}(\zeta_0, \delta)$ 上, $1/g_n(\zeta) - \rho_n^k/a$ 一致收敛于 $1/g(\zeta)$.

又由于 $1/g$ 不是常数, 所以存在 $\zeta_n, \zeta_n \to \zeta_0$, 使得当 $n$ 充分大时有

$$\frac{1}{g_n(\zeta_n)} - \frac{\rho_n^k}{a} = 0.$$

于是有 $f_n(z_n + \rho_n\zeta_n) = a$. 从而有

$$g_n^{(k)}(\zeta_n) = f_n^{(k)}(z_n + \rho_n\zeta_n) = b. \tag{5.2.10}$$

若 $k=1$, 则由 (5.2.10) 得

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{g(\zeta)}\right)'\bigg|_{\zeta=\zeta_0} &= -\frac{g'(\zeta_0)}{g^2(\zeta_0)} \\ &= \lim_{n\to\infty}\left[-\frac{g_n'(\zeta_n)}{g_n^2(\zeta_n)}\right] = 0,\end{aligned}$$

因此 $\zeta_0$ 为 $g(\zeta)$ 的重极点. 所以 $g$ 没有单级极点.

类似地, 若 $k=2$, 则由 (5.2.10) 得

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{g(\zeta)}\right)''\bigg|_{\zeta=\zeta_0} &= -\frac{g''(\zeta_0)}{g^2(\zeta_0)} + 2\frac{[g'(\zeta_0)]^2}{g^3(\zeta_0)} \\ &= \lim_{n\to\infty}\left[-\frac{g_n''(\zeta_n)}{g_n^2(\zeta_n)} + 2\frac{(g_n'(\zeta_n))^2}{g_n^3(\zeta_n)}\right] \\ &= -\lim_{n\to\infty}\frac{g_n''(\zeta_n)}{g_n^2(\zeta_n)} + 2\lim_{n\to\infty}\frac{(g_n'(\zeta_n))^2}{g_n^3(\zeta_n)} \\ &= 2\lim_{n\to\infty}\left\{\left[-\frac{g_n'(\zeta_n)}{g_n^2(\zeta_n)}\right]^2 g_n(\zeta_n)\right\}.\end{aligned} \tag{5.2.11}$$

由于 $\lim_{n\to\infty} g_n(\zeta_n)=\infty$, 于是由 (5.2.11) 得

$$\lim_{n\to\infty}\left[-\frac{g_n'(\zeta_n)}{g_n^2(\zeta_n)}\right]^2=0.$$

所以 $(1/g(\zeta))'\big|_{\zeta=\zeta_0}=0$. 因此 $\zeta_0$ 为 $g(\zeta)$ 的重极点. 故 $g$ 没有单级极点.

若 $k\geqslant 3$, 由归纳法可得

$$\left(\frac{1}{g}\right)^{(k)}=-\frac{g^{(k)}}{g^2}+k!\frac{(g')^k}{g^{k+1}}+\sum_{0\leqslant i\leqslant k-2}A_ig^i, \tag{5.2.12}$$

其中 $A_i$ 是 $(1/g)'$, $(1/g)''$, $\cdots$, $(1/g)^{(k-1)}$ 的多项式.

因此由 (5.2.10) 和 (5.2.12) 得

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{1}{g(\zeta)}\right)^{(k)}\Bigg|_{\zeta=\zeta_0}\\
=&\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{g_n(\zeta)}\right)^{(k)}\Bigg|_{\zeta=\zeta_n}\\
=&\lim_{n\to\infty}\left[-\frac{g_n^{(k)}(\zeta_n)}{g_n^2(\zeta_n)}+k!\frac{(g_n'(\zeta_n))^k}{g_n^{k+1}(\zeta_n)}+\sum_{0\leqslant i\leqslant k-2}A_ig_n^i(\zeta_n)\right]\\
=&\lim_{n\to\infty}\left[k!\frac{(g_n'(\zeta_n))^k}{g_n^{k+1}(\zeta_n)}+\sum_{0\leqslant i\leqslant k-2}A_ig_n^i(\zeta_n)\right]\\
=&\lim_{n\to\infty}\left[k!\frac{(g_n'(\zeta_n))^k}{g_n^{k+1}(\zeta_n)}+\sum_{1\leqslant i\leqslant k-2}A_ig_n^i(\zeta_n)\right]+A_0(\zeta_0)\\
=&\lim_{n\to\infty}\left[k!\left(-\frac{(g_n'(\zeta_n))}{g_n^2(\zeta_n)}\right)^k(-1)^kg_n^{k-1}(\zeta_n)+\sum_{1\leqslant i\leqslant k-2}A_ig_n^{i-1}(\zeta_n)\right]g_n(\zeta_n)\\
&+A_0(\zeta_0).
\end{aligned}\tag{5.2.13}$$

由于 $\lim_{n\to\infty} g_n(\zeta_n)=\infty$, 于是由 (5.2.13) 得

$$\lim_{n\to\infty}\left[k!\left(-\frac{(g_n'(\zeta_n))}{g_n^2(\zeta_n)}\right)^k(-1)^kg_n^{k-1}(\zeta_n)+\sum_{1\leqslant i\leqslant k-2}A_ig_n^{i-1}(\zeta_n)\right]=0.$$

类似地可得

$$\lim_{n\to\infty}\left[k!\left(-\frac{(g_n'(\zeta_n))}{g_n^2(\zeta_n)}\right)^k(-1)^kg_n^{k-2}(\zeta_n)+\sum_{2\leqslant i\leqslant k-2}A_ig_n^{i-2}(\zeta_n)\right]=0.$$

如此进行下去, 我们归纳可得

$$\lim_{n\to\infty}\left[-\frac{g_n'(\zeta_n)}{g_n^2(\zeta_n)}\right]^k=0.$$

于是即得 $(1/g(\zeta))'\big|_{\zeta=\zeta_0}=0$, 从而 $\zeta_0$ 为 $g(\zeta)$ 的重级极点. 因而 $g$ 没有单级极点, 所以 (ii) 成立.

由引理 4.2.4 知, $g$ 是有理函数. 若 $g$ 是多项式, 则由 $g$ 的零点重级 $\geqslant k+1$ 及 (i) 可知, $g$ 是常数, 矛盾; 若 $g$ 是非多项式有理函数, 则由 $g$ 的零点重级 $\geqslant k+1$, (i) 以及引理 4.2.2 可知, $g$ 有一单级极点, 与 $g$ 没有单级极点矛盾.

因此 $\mathcal{F}$ 在 $D$ 内正规. 定理 5.8 得证. □

**定理 5.2.3** 设 $\mathcal{F}$ 是区域 $D$ 内的一族全纯函数, $a,b$ 是两个判别的非零有穷复数. 若对于 $\mathcal{F}$ 中的任意函数 $f$, $f(z)=a \Longleftrightarrow f'(z)=a$, $f'(z)=b \Longleftrightarrow f''(z)=b$, 则 $\mathcal{F}$ 在 $D$ 内正规

为了证明定理 5.2.3, 我们需要如下引理 (见 [92] 定理 1).

**引理 5.2.1** 设 $f$ 为有穷级非常数整函数, $a$ 为有穷复数. 若 $f$ 与 $f'$ CM 分担 $a$, 则

$$f'(z)-a=A[f(z)-a],$$

其中 $A$ 为非零常数.

**定理 5.2.3 的证明** 假设 $\mathcal{F}$ 在 $z_0\in D$ 处不正规. 由引理 3.1.3 知, 存在序列 $z_n\to z_0$, 正数列 $\rho_n\to 0^+$ 和函数列 $f_n\in\mathcal{F}$, 使得 $g_n(\zeta)=\rho_n^{-1}[f_n(z_n+\rho_n\zeta)-a]$ 在复平面上按球距内闭一致收敛于一个非常数整函数 $g$ 且 $g^{\#}(\zeta)\leqslant g^{\#}(0)=(|a|+1)+1$. 由定理 1.3.3 知, $g$ 的级不大于 1.

我们断言: (i) $g(\zeta)=0 \Longleftrightarrow g'(\zeta)=a$; (ii) $g'(\zeta)=b \Longleftrightarrow g''(\zeta)=0$.

(i) 设 $g(\zeta_0)=0$. 则由 Hurwitz 定理知, 存在 $\zeta_n$, $\zeta_n\to\zeta_0$, 使得当 $n$ 充分大时有

$$g_n(\zeta_n)=\rho_n^{-1}[f_n(z_n+\rho_n\zeta_n)-a]=0.$$

所以 $f_n(z_n+\rho_n\zeta_n)=a$. 由于 $f_n(\zeta)=a \Longleftrightarrow f_n'(\zeta)=a$, 则有

$$g_n'(\zeta_n)=f_n'(z_n+\rho_n\zeta_n)=a,$$

因此 $g'(\zeta_0)=\lim\limits_{n\to\infty}g_n'(\zeta_n)=a$. 所以 $g(\zeta)=0\Rightarrow g'(\zeta)=a$.

现设 $g'(\zeta_0)=a$. 则 $g'\not\equiv a$. 否则 $g(\zeta)=a(\zeta-\zeta_1)$, 经简单计算得

$$g^{\#}(0)\leqslant\begin{cases}1 & |\zeta_1|\geqslant 1,\\ |a| & |\zeta_1|<1.\end{cases}$$

这与 $g^{\#}(0)=(|a|+1)+1$ 矛盾. 由于 $g'(\zeta_0)=a$, 但 $g'\not\equiv a$, 所以存在 $\zeta_n$, $\zeta_n\to\zeta_0$, 使得当 $n$ 充分大时, 有 $f_n'(z_n+\rho_n\zeta_n)=g_n'(\zeta_n)=a$. 因此 $f_n(z_n+\rho_n\zeta_n)=a$. 所以 $g_n(\zeta_n)=[f_n(z_n+\rho_n\zeta_n)-a]/\rho_n=0$. 由于 $g(\zeta_0)=\lim\limits_{n\to\infty}g_n(\zeta_n)=0$, 所以 $g'(\zeta)=a\Rightarrow g(\zeta)=0$. 于是 (i) 成立.

(ii) 设 $g'(\zeta_0)=b$. 则 $g(\zeta_0)\neq\infty$. 显然 $g'\not\equiv b$, 否则 $g(\zeta)=b(\zeta-\zeta_1)$, 这与 (i) 矛盾. 由 Hurwitz 定理知, 存在 $\zeta_n$, $\zeta_n\to\zeta_0$, 使得当 $n$ 充分大时, 有 $f_n'(z_n+\rho_n\zeta_n)=g_n'(\zeta_n)=b$. 因此 $f_n''(z_n+\rho_n\zeta_n)=b$, 所以 $g_n''(\zeta_n)=\rho_n f_n''(z_n+\rho_n\zeta_n)=\rho_n b$. 由于 $g''(\zeta_0)=\lim\limits_{n\to\infty}g_n''(\zeta_n)=0$, 所以 $g'(\zeta)=b\Rightarrow g''(\zeta)=0$.

现设 $g''(\zeta_0)=0$. 显然 $g''\not\equiv 0$, 否则 $g$ 为一次多项式, 这与 (i) 矛盾. 由于在 $\zeta_0$ 的邻域内, $g_n''(\zeta)-\rho_n b$ 一致收敛于 $g''(\zeta)$ , 由 Hurwitz 定理知, 存在 $\zeta_n$, $\zeta_n\to\zeta_0$, 使得当 $n$ 充分大时有

$$g_n''(\zeta_n)-\rho_n b=\rho_n f_n''(z_n+\rho_n\zeta_n)-\rho_n b=0.$$

所以 $f_n''(z_n+\rho_n\zeta_n)=b$. 由于 $f_n(\zeta)=b\Longleftrightarrow f_n'(\zeta)=b$, 所以

$$g_n'(\zeta_n)=f_n'(z_n+\rho_n\zeta_n)=b,$$

因此 $g'(\zeta_0)=\lim\limits_{n\to\infty}g_n'(\zeta_n)=b$. 所以 $g''(\zeta)=0\Rightarrow g'(\zeta)=b$. 于是 (ii) 成立.

由 (i), (ii) 可知, $g+a$ 与 $g'$ CM 分担 $a$. 于是由引理 5.2.1 得

$$g'(\zeta)-a=cg(\zeta), \tag{5.2.14}$$

其中 $c\neq 0$. 所以

$$g(\zeta)=Ae^{c\zeta}-\frac{a}{c},$$

$$g'(\zeta)=Ace^{c\zeta},\quad g''(\zeta)=Ac^2e^{c\zeta}, \tag{5.2.15}$$

与 (ii) 矛盾.

所以 $\mathcal{F}$ 在 $D$ 内正规. 定理 5.2.3 得证. □

**问题 5.1** 定理 5.2.3 对于亚纯函数族是否仍然成立?

## 5.3 分担一个集合的亚纯函数族

刘晓军和庞学诚 [134] 改进了定理 5.1.1, 证明了

**定理 5.3.1** 设 $\mathcal{F}$ 为区域 $D$ 内的一族亚纯函数, $a_1,a_2,a_3$ 为三个判别的有穷复数, $S=\{a_1,a_2,a_3\}$. 若对任意 $f(z)\in\mathcal{F}$, $f(z)\in S\Leftrightarrow f'(z)\in S$, 则 $\mathcal{F}$ 在 $D$ 内正规.

为了证明定理 5.3.1, 我们先证明

**引理 5.3.1** 设 $f(z)$ 为有穷级亚纯函数, $a_1,a_2,a_3$ 为三个判别的有穷复数, $S=\{a_1,a_2,a_3\}$. 若 $f(z)$ 的零点只有有限个, 且 $f'(z)\in S\Rightarrow f(z)=0$, 则 $f$ 为有理函数.

**证明** 对 $f'$ 应用 Nevanlinna 第二基本定理得

$$\begin{aligned}2T(r,f')\leqslant&\overline{N}(r,f)+\overline{N}\left(r,\frac{1}{f'-a_1}\right)+\overline{N}\left(r,\frac{1}{f'-a_2}\right)+\overline{N}\left(r,\frac{1}{f'-a_3}\right)+S(r,f')\\=&\overline{N}\left(r,\frac{1}{f}\right)+\overline{N}(r,f)+S(r,f').\end{aligned}\tag{5.3.1}$$

因为 $f$ 是有穷级亚纯函数, $T(r,f')\leqslant 2T(r,f)+S(r,f)$, 所以 $f'$ 也是有穷级亚纯函数. 于是有 $S(r,f')=O(\log r)$. 又 $f$ 只有有限个零点, 所以 $\overline{N}\left(r,\frac{1}{f}\right)=O(\log r)$. 代入 (5.3.1) 式得 $2T(r,f')\leqslant\overline{N}(r,f)+O(\log r)$, 所以 $T(r,f')\leqslant O(\log r)$, 即 $f$ 为有理函数. □

**定理 5.3.1 的证明** 不妨设 $D$ 是单位圆 $\Delta$. 若 $\mathcal{F}$ 在 $\Delta$ 内不正规, 则由引理 3.1.3 知, 存在点列 $z_n,|z_n|\leqslant r<1$, 函数列 $f_n(z)\in\mathcal{F}$, 正数列 $\rho_n,\rho_n\to 0^+$, 使得 $h_n(\zeta)=f_n(z_n+\rho_n\zeta)$ 在复平面 $\mathbb{C}$ 上按球距内闭一致收敛到一个非常数亚纯函数 $h(\zeta)$, 且 $h(\zeta)$ 的级至多为 2.

不妨设 $a_1\neq 0$. 令 $\mathcal{G}=\{g_n:n=1,2,3,\cdots\}$, 其中

$$g_n(\zeta)=\rho_n^{-1}(h_n(\zeta)-a_1)=\rho_n^{-1}(f_n(z_n+\rho_n\zeta)-a_1),$$

我们断言: $\mathcal{G}$ 在 $h(\zeta)-a_1$ 的零点处不正规.

设 $\zeta_0$ 为 $h(\zeta)-a_1$ 的零点. 假设 $\mathcal{G}$ 在 $\zeta_0$ 处正规, 即在 $\mathcal{G}$ 中任取一个函数列 $g_n(\zeta)$ 都有子列 (仍记为 $\{g_n(\zeta)\}$) 在 $\Delta$ 内按球距内闭一致收敛于亚纯函数 $g(\zeta)$.

因为 $h(\zeta)\not\equiv a_1$, 故由 Hurwitz 定理知, 存在 $\zeta_n,\zeta_n\to\zeta_0$, 使得 $h_n(\zeta_n)=a_1$. 所以 $g(\zeta_0)=\lim\limits_{n\to\infty}\rho_n^{-1}(h_n(\zeta_n)-a_1)=0$.

由零点的孤立性知, 存在 $\zeta_0$ 的去心邻域 $\Delta'(\zeta_0,\delta(\zeta_0))=\{\zeta:0<|\zeta-\zeta_0|<\delta(\zeta_0)\}$, 使得 $h(\zeta)-a_1$ 在 $\Delta'(\zeta_0,\delta(\zeta_0))$ 内没有零点.

设 $\zeta_1$ 为 $\Delta'(\zeta_0,\delta(\zeta_0))$ 内任意一点, 则

$$g(\zeta_1)=\lim_{n\to\infty}\rho_n^{-1}(h_n(\zeta_1)-a_1)=\infty.$$

从而 $\mathcal{G}$ 在 $h(\zeta)-a_1$ 的零点处不正规. 所以 $\mathcal{G}$ 在 $\zeta_0$ 的 $\delta$ 邻域 $\Delta(\zeta_0,\delta)$ 内不正规. 于是由引理 3.1.3 知, 存在点列 $\zeta_n,|\zeta_n|\leqslant r<1$, 函数列 $g_n(\zeta)\in\mathcal{G}$, 正数列 $\eta_n,\eta_n\to 0^+$, 使得 $F_n(\xi)=\eta_n^{-1}g_n(\zeta_n+\eta_n\xi)=\dfrac{h_n(\zeta_n+\eta_n\xi)-a_1}{\rho_n\eta_n}$ 在复平面 $\mathbb{C}$ 上按球距内闭一致收敛到一个非常数亚纯函数 $F(\xi)$, 且 $F(\xi)$ 的级至多为 2.

我们断言:

(i) $F(\xi)$ 的零点只有有限个;

(ii) $F'(\xi)\in S=\{a_1,a_2,a_3\}\Leftrightarrow F(\xi)=0$.

设 $\zeta_0$ 为 $h(\zeta)-a_1$ 的 $k$ 重零点，则 $F$ 至多存在 $k$ 个不同的零点. 事实上，若存在 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{k+1}$，使得 $F(\xi_j)=0$. 由于 $F(\xi)\not\equiv 0$, 则由 Hurwitz 定理知，存在 $\xi_{n_j}\to\xi_j, j=1,2,\cdots,k+1$. 使得 $F_n(\xi_{n_j})=0$, 故 $h_n(\zeta_n+\eta_n\xi_{n_j})-a_1=0$. 又因为 $\zeta_n+\eta_n\xi_{n_j}\to\zeta_0$. 由 Hurwitz 定理知，$\zeta_0$ 为 $h(\zeta)-a_1$ 的至少 $k+1$ 重零点，这与假设矛盾. 所以断言 (i) 成立.

设 $F(\xi_0)=0$. 由于 $F(\xi)\not\equiv 0$, 则由 Hurwitz 定理知，存在 $\xi_n$, $\xi_n\to\xi_0$, 使得 $F_n(\xi_n)=0$, 即 $f_n(z_n+\rho_n(\zeta_n+\eta_n\xi_n))=a_1$, 故 $f_n'(z_n+\rho_n(\zeta_n+\eta_n\xi_n))\in S$. 于是有 $F_n'(\zeta_n)\in S$, 所以 $F'(\xi_0)\in S$. 于是证得 $F(\zeta)=0\Rightarrow F'(\zeta)\in S$.

设 $F'(\xi_0)=a_j, j=1,2,3$. 由于 $F'(\xi)\not\equiv a_j$, 则由 Hurwitz 定理知, 存在 $\xi_n$, $\xi_n\to\xi_0$, 使得 $F_n'(\xi_n)=f_n'(z_n+\rho_n(\zeta_n+\eta_n\xi_n))=a_j$, 故 $f_n(z_n+\rho_n(\zeta_n+\eta_n\xi_n))\in S$. 故存在 $\{f_n\}$ 的子列仍记为 $\{f_n\}$, 使得 $f_n(z_n+\rho_n(\zeta_n+\eta_n\xi_n))=a_1$. 所以 $F(\xi_0)=\lim\limits_{n\to\infty}F_n(\xi_n)=\dfrac{f_n(z_n+\rho_n(\zeta_n+\eta_n\xi_n))-a_1}{\rho_n\eta_n}=0$. 于是有 $F'(\zeta)\in S\Rightarrow F(\zeta)=0$. 所以断言 (ii) 成立.

由断言 (i)(ii) 及引理 5.6 知, $F(\xi)$ 为有理函数. 又由于 $g_n(\zeta)$ 在邻域 $\Delta(\zeta_0,\delta)$ 内解析，所以 $F(\xi)$ 为多项式. 设 $F(\xi)=c_0\xi^p+c_1\xi^{p-1}+\cdots+c_p$, 其中 $c_j(j=0,1,2,\cdots,p)$ 为复数且 $c_0\neq 0$, 则当 $r\to\infty$ 时, 有 $T(r,F')=(p-1)\log r$, $N\left(r,\dfrac{1}{F}\right)=p\log r$, $S(r,F')=O(1)$. 因此由 (5.3.1) 得

$$2(p-1)\log r\leqslant p\log r+O(1).$$

所以 $p\leqslant 2$.

当 $p=1$ 时, $F(\xi)=c_0\xi+c_1$, 由断言 (ii) 得 $F'(\xi)\equiv a_j$, 但 $F(\xi)=0$ 仅有一个零点, 这与断言 (ii) 矛盾.

当 $p=2$ 时, $F(\xi)=c_0(\xi-\xi_0)(\xi-\xi_1)$, 求导得 $F'(\xi)=c_0(2\xi-\xi_0-\xi_1)$, $\dfrac{a_j+c_0(\xi_0-\xi_1)}{2c_0}(j=1,2,3)$ 为 $F'(\xi)=a_j$ 的零点，但 $F(\xi)=0$ 仅有两个零点, 这与断言 (ii) 矛盾. 所以 $\mathcal{F}$ 在 $D$ 内正规. □

对于全纯函数族的情形有如下结果.

**定理 5.3.2** *设 $\mathcal{F}$ 为区域 $D$ 内的一族全纯函数，$a_1,a_2,a_3$ 为判别的有穷复数，$M$ 是一个正数. 若对任意 $f(z)\in\mathcal{F}$，当 $f(z)=a_i(i=1,2,3)$ 时，$|f'(z)|\leqslant M$，则 $\mathcal{F}$ 在 $D$ 内正规.*

**证明** 假设 $\mathcal{F}$ 在 $D$ 内不正规. 则由引理 3.1.3 知, 存在点列 $z_n\in D$, 正数列 $\rho_n\to 0^+$, 和函数列 $f_n\in\mathcal{F}$, 使得 $g_n(\xi)=f_n(z_n+\rho_n\xi)$ 在复平面 $\mathbb{C}$ 上按球距内闭一致收敛到一个非常数的整函数 $g$.

我们断言：若 $g(\xi)=a_1,a_2,a_3$, 则有 $g'(\xi)=0$.

设 $g(\xi_0) = a_1$, 则由 Hurwitz 定理知, 存在 $\xi_n$, $\xi_n \to \xi_0$, 使得对于充分大的 $n$, 有 $a = g_n(\xi_n) = f_n(z_n + \rho_n\xi_n)$. 于是有 $|f_n'(z_n + \rho_n\xi_n)| \leqslant M$. 因此 $|g_n'(\xi_n)| = |\rho_n f_n'(z_n + \rho_n\xi_n)| \leqslant \rho_n M$, 于是即得 $g'(\xi_0) = \lim\limits_{n\to\infty} g_n'(\xi_n) = 0$. 这样我们证明了当 $g(\xi) = a_1$ 时, 有 $g'(\xi) = 0$. 同理, 当 $g(\xi_0) = a_2$ 或 $a_3$ 时, 有 $g'(\xi_0) = 0$. 于是上述断言得证.

显然 $g' \not\equiv 0$. 于是由 Nevanlinna 第二基本定理, 并注意 $g$ 是整函数得

$$
\begin{aligned}
2T(r,g) &\leqslant \overline{N}\left(r,\frac{1}{g-a}\right) + \overline{N}\left(r,\frac{1}{g-b}\right) + \overline{N}\left(r,\frac{1}{g-c}\right) + S(r,g)\\
&\leqslant N\left(r,\frac{1}{g'}\right) + S(r,g) \leqslant T\left(r,\frac{1}{g'}\right) + S(r,g)\\
&\leqslant T(r,g') + S(r,g) \leqslant T(r,g) + S(r,g).
\end{aligned}
$$

于是即得 $T(r,g) = S(r,g)$, 矛盾. 所以 $\mathcal{F}$ 在 $D$ 内正规. □

## 5.4 分担函数的全纯函数族

庞学诚 [151], 陈怀惠和华歆厚 [51] 证明了如下定理.

**定理 5.4.1** *设 $\mathcal{F}$ 是区域 $D$ 内的一族全纯函数, $a$ 是一非零有穷复数. 若对于每个 $f \in \mathcal{F}$, $f'$ 和 $f''$ 在 $D$ 内分担 $a$, 则 $\mathcal{F}$ 在 $D$ 内正规.*

**证明** 不妨设 $D$ 为单位圆 $\Delta$. 假如 $\mathcal{F}$ 在 $\Delta$ 内不正规. 则由引理 3.1.3 知, 存在函数列 $f_n \in \mathcal{F}$, 点列$z_n \in \Delta$, 和正数列 $\rho_n \to 0^+$, 使得 $g_n(\zeta) = \rho_n^{-1}[f_n(z_n + \rho_n\zeta) - a]$ 在复平面 $\mathbb{C}$ 上按球距内闭一致收敛于一个非常数的整函数 $g$, 并且满足 $g^{\#}(\zeta) \leqslant g^{\#}(0) = 2(|a|+1)+1$. 于是由定理 1.3.3, 得 $g$ 的级至多为 1.

用定理 4.3.1 的证明方法一样证得

(i) $g(\zeta) = 0 \Longrightarrow g'(\zeta) = a$;

(ii) $g'(\zeta) = a \Longrightarrow g''(\zeta) = 0$.

如果 $g \neq 0$, 则 $g(\zeta) = \mathrm{e}^{A\zeta+B}$, 其中 $A(\neq 0)$, $B$ 是常数. 于是有

$$g'(\zeta) = A\mathrm{e}^{A\zeta+B},\ g''(\zeta) = A^2\mathrm{e}^{A\zeta+B}.$$

设 $g'(\zeta_0) = a$, 则 $A^2\mathrm{e}^{A\zeta_0+B} = g''(\zeta_0) = 0$, 这是不可能的. 所以存在 $\zeta_0$, 使得 $g(\zeta_0) = 0$. 易知 $g' \not\equiv a$, 否则, 有 $g(\zeta) = a(\zeta - \zeta_1)$, 于是即得 $g^{\#}(0) < 2(|a|+1)+1$, 与 $g^{\#}(0) = 2(|a|+1)+1$ 矛盾.

由 (i) 和 (ii) 知, $\zeta_0$ 是 $g'(\zeta) - a$ 的重级为 $m(\geqslant 2)$ 的零点. 因此 $g^{(1+m)}(\zeta_0) \neq 0$, 并且存在 $\delta > 0$, 使得当 $|\zeta - \zeta_0| < \delta$ 时, 有

$$g^{(1+m)}(\zeta) \neq 0. \tag{5.4.1}$$

由 Hurwitz 定理, 存在 $m$ 个序列 $\{\zeta_{in}\}, i=1,2,\cdots,m$ 使得, $\lim\limits_{n\to\infty}\zeta_{in}=\zeta_0$, 并且对于充分大的 $n$ 有

$$g_n'(\zeta_{in})=a,\quad i=1,2,\cdots,m. \tag{5.4.2}$$

因此由 $f_n'(z)=a\Longrightarrow f_n''(z)=a$, 我们得到

$$g_n''(\zeta_{in})=\rho_n f_n''(z_n+\rho_n\zeta_{in})\neq 0,\ (i=1,2,\cdots,m). \tag{5.4.3}$$

于是有

$$\zeta_{in}\neq\zeta_{jn},\quad 1\leqslant i<j\leqslant m. \tag{5.4.4}$$

故由 (5.4.3) 和 (5.4.4) 得, $g^{(1+m)}(\zeta_0)=0$, 与 (5.4.1) 矛盾.

所以 $\mathcal{F}$ 在 $D$ 内正规. 定理 5.4.1 得证. □

常建明, 方明亮, L. Zalcman 等人 [39, 42] 推广并改进了定理 5.4.1, 证明了

**定理 5.4.2**　*设 $\mathcal{F}$ 是区域 $D$ 内的一族全纯函数, $k\geqslant 2$ 是一正整数. $h$ 是一正数, $a$ 是一个在 $D$ 内不取零值的全纯函数. 若对于每个 $f\in\mathcal{F}$, $f(z)=0\Longrightarrow f'(z)=a(z)$, $f'(z)=a(z)\Longrightarrow |f^{(k)}(z)|\leqslant h$, 则 $\mathcal{F}$ 在 $D$ 内正规.*

为了证明定理 5.4.2, 我们先证明如下引理

**引理 5.4.1**　*置*

$$F(z)=\sum_{j=1}^{n}P_j(z)\mathrm{e}^{w_j z}, \tag{5.4.5}$$

*这里 $n>1$ 是整数, $P_j(z)(\not\equiv 0)(1\leqslant j\leqslant n)$ 是多项式, $w_j(1\leqslant j\leqslant n)$ 是判别的有限复数. 用 $\Omega(\subset\mathbb{C})$ 表示包含 $\overline{w}_j\in\Omega\ (j=1,2,\cdots,n)$ 的最小凸闭包, 其中 $\overline{w}$ 表示复数 $w$ 的共轭复数. 记 $\partial_1,\partial_2,\cdots,\partial_m$ 是凸多边形 $\Omega$ 的边界 $\partial\Omega$ 的各条边, 并记 $l_1,l_2,\cdots,l_m$ $(1\leqslant m\leqslant n)$ 是各边的长度, $h_1:\arg z=\theta_1$, $h_2:\arg z=\theta_2$ , $\cdots$, $h_m:\arg z=\theta_m$ 是各边的外法线. 再用 $n(Y,\theta,\varepsilon;F)$ 表示 $F$ 在区域 $\{z:\mathrm{Re}(z\mathrm{e}^{-i\theta})<Y,\ |\arg z-\theta|<\varepsilon\}$ 内的零点个数 (计重数).*

*那么对充分小的正数 $\varepsilon$, 我们有*

$$n(Y,\theta_s,\varepsilon;F)=\frac{l_s}{2\pi}Y+O(1),(s=1,2,\cdots,m)\ \ Y\to+\infty; \tag{5.4.6}$$

*并且对任何 $\theta\notin\{\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_m\}$, 存在正数 $\varepsilon=\varepsilon(\theta)$ 使得*

$$n(Y,\theta,\varepsilon;F)=O(1),\quad Y\to+\infty. \tag{5.4.7}$$

**证明** 设 $\partial_1$ 是 $\partial\Omega$ 的一条边, 它的两个端点为 $\overline{w}_1$ 和 $\overline{w}_k$. 设 $\partial_1$ 的两条邻边为 $\partial_2$ 和 $\partial_m$, $\partial_2$ 的一个端点为 $\overline{w}_1$, $\partial_m$ 的一个端点为 $\overline{w}_k$. 于是我们只要对 $\theta_1$ 证明 (5.4.6), 对 $\theta_1 < \theta < \theta_2$ 证明 (5.4.7) 即可.

显然, 我们可以假设当我们沿着 $\partial_1$ 从 $\overline{w}_1$ 走到 $\overline{w}_k$ 时, 整个 $\Omega$ 都在右侧.

由于函数 $\mathrm{e}^{-w_1 z}F(z)$ 与 $F(z)$ 具有相同的零点, 而且重级也相同, 我们可设 $w_1 = 0$, 因此 $\partial_1$ 和 $\partial_2$ 公共端点是原点.

设 $\partial_1$ 位于射线 $\arg z = \alpha(0 \leqslant \alpha < 2\pi)$ 上. 我们做一旋转, 即考虑函数 $F(\mathrm{e}^{-\alpha \mathrm{i}}z)$ 来代替 $F(z)$, 这是由于 $G(z) = F(\mathrm{e}^{-\alpha\mathrm{i}}z)$ 在 $\{z : \mathrm{Re}(z\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\theta+\alpha)}) \leqslant Y,\ |\arg z-(\theta+\alpha)| \leqslant \varepsilon\}$ 内的零点个数等于 $F(z)$ 在 $\{z : \mathrm{Re}(z\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}) \leqslant Y,\ |\arg z - \theta| \leqslant \varepsilon\}$ 内的零点个数. 对 $G(z)$, $\partial_1$ 的对应边落在正实轴上. 因此我们可以假设 $\alpha = 0$, 从而 $\partial_1$ 落在正实轴上.

这样, 我们将 $F$ 重写为

$$F(z) = P_1(z) + \sum_{j=2}^{k} P_j(z)\mathrm{e}^{w_j z} + \sum_{j=k+1}^{n} P_j(z)\mathrm{e}^{w_j z}, \tag{5.4.8}$$

这里 $w_1, w_2, \cdots, w_k$ 是实数, 满足 $0 = w_1 < w_2 < \cdots < w_k$, $w_j(j \geqslant k+1)$ 是复数, 满足 $\mathrm{Im}(w_j) > 0$. 于是 $\arg z = \pi/2 = \theta_1$ 是 $\partial\Omega$ 的边 $\partial_1$ 的外法线.

现在我们证明对任何 $\theta$, $\theta_1 < \theta < \theta_2$, 和任何正数 $\varepsilon < \min\{\theta - \theta_1, \theta_2 - \theta\}/2$ 有

$$n(Y, \theta, \varepsilon; F) = O(1), \quad Y \to +\infty. \tag{5.4.9}$$

设 $z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}(|\alpha - \theta| \leqslant \varepsilon)$ 和 $w_j = |w_j|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi_j}(j = 2, 3, \cdots, n)$. 则 $0 \leqslant \phi_j \leqslant 3\pi/2 - \theta_2$, 因此 $\pi/2 + \varepsilon < \theta - \varepsilon < \alpha < \phi_j + \alpha \leqslant 3\pi/2 - \theta_2 + \theta + \varepsilon < 3\pi/2 - \varepsilon$. 于是对任何 $t > 0$, 当 $r \to \infty$ 时有

$$|\mathrm{e}^{w_j z}| = \exp(|w_j| r\cos(\phi_j + \alpha)) = o(r^{-t}),$$

从而有

$$F(z) = P_1(z) + o(1), \quad r \to \infty. \tag{5.4.10}$$

这就导出了 (5.4.9). 于是 (5.4.7) 得到了证明.

下设 $\partial_m$ 的外法线为 $\arg z = \theta_m$, 并记 $\alpha_1 = \theta_2 - \pi/2$, $\alpha_2 = \pi/2 - \theta_m$ 以及 $\varepsilon$ 是一个正数满足 $\varepsilon < \min\{\pi/2, \alpha_1, \alpha_2\}$ 并且对 $j = k+1, k+2, \cdots, n$ 有 $|\mathrm{Re}(w_j) - w_k|\tan\varepsilon - \mathrm{Im}(w_j) < 0$. 我们现在来证明

$$n\left(Y, \frac{\pi}{2}, \varepsilon; F\right) = \frac{w_k}{2\pi}Y + O(1), \ (Y \to \infty). \tag{5.4.11}$$

对给定的 $y \geqslant 0$, 置

$$S(y)=\{z:\operatorname{Im}(z)=y,\ |\arg z-\frac{\pi}{2}|\leqslant\varepsilon\},$$
$$I(y)=\{x:\ -y\tan\varepsilon\leqslant x\leqslant y\tan\varepsilon\}.$$

不失一般性, 我们可设 $P_k(z)$ 是首一多项式, 并且 $P_k(\mathrm{i}y)(y\in\mathbb{R})$ 的虚部满足 $\operatorname{Im}(P_k(\mathrm{i}y))\not\equiv 0$. (否则, 我们考虑函数 $zF(z)$ 代替 $F(z)$. 那么有 $\operatorname{Im}(\mathrm{i}yP_k(\mathrm{i}y))\not\equiv 0$. 事实上, 如果 $\operatorname{Im}(P_k(\mathrm{i}y))\equiv 0$ 并且 $\operatorname{Im}(\mathrm{i}yP_k(\mathrm{i}y))\equiv 0$, 那么就有 $\operatorname{Im}(P_k(\mathrm{i}y))\equiv\operatorname{Re}(P_k(\mathrm{i}y))\equiv 0$. 由此可知 $P_k(\mathrm{i}y)\equiv 0$, 从而 $P_k(z)\equiv 0$, 矛盾)

**断言**　存在正数 $Y_0$, 使得对任何给定的 $y>Y_0$, 关于 $x$ 的实函数 $\operatorname{Im}F(z)$ 在 $I(y)$ 上只要不恒为零, 就至多只有 $m_1+m_2+\cdots+m_k+k-1$ 个零点, 这里 $m_j=\deg P_j$, $(j=1,2,\cdots,k)$.

我们用反证法来证明此断言. 若上述断言不成立, 则对于任意正数 $N$, 存在 $y,y>N$, 使得在 $I(y)$ 上 $\operatorname{Im}(F(z))$ 至少有 $m_1+m_2+\cdots+m_k+k$ 个零点.

设 $z=x+\mathrm{i}y\in S(y)$. 那么我们有

$$\begin{aligned}
g_1(x)=\operatorname{Im}(F(z))&=\frac{F(z)-\overline{F(z)}}{2\mathrm{i}}\\
&=\frac{1}{2\mathrm{i}}\left\{P_1(z)-\overline{P_1(z)}+\sum_{j=2}^{k}\left[P_j(z)\mathrm{e}^{w_jz}-\overline{P_j(z)}\mathrm{e}^{w_j\bar z}\right]\right.\\
&\quad\left.+\sum_{j=k+1}^{n}\left[P_j(z)\mathrm{e}^{w_jz}-\overline{P_j(z)}\mathrm{e}^{\overline{w}_j\bar z}\right]\right\}\\
&=Q_{1,1}(x)+\sum_{j=2}^{k}Q_{j,1}(x)\mathrm{e}^{w_jx}+\sum_{j=k+1}^{n}Q_{j,1}(x)\mathrm{e}^{\operatorname{Re}(w_j)x-\operatorname{Im}(w_j)y},
\end{aligned}\tag{5.4.12}$$

这里

$$\begin{aligned}
Q_{1,1}(x)&=\frac{1}{2\mathrm{i}}[P_1(z)-\overline{P_1(z)}],\\
Q_{j,1}(x)&=\frac{1}{2\mathrm{i}}[P_j(z)\mathrm{e}^{w_jy\mathrm{i}}-\overline{P_j(z)}\mathrm{e}^{-w_jy\mathrm{i}}],\ j=2,\cdots,k,\\
Q_{j,1}(x)&=\frac{1}{2\mathrm{i}}[P_j(z)\mathrm{e}^{(\operatorname{Im}(w_j)x+\operatorname{Re}(w_j)y)\mathrm{i}}-\overline{P_j(z)}\mathrm{e}^{-(\operatorname{Im}(w_j)x+\operatorname{Re}(w_j)y)\mathrm{i}}],\\
&\quad j=k+1,k+2,\cdots,n.
\end{aligned}$$

显然, 所有 $Q_{j,1}$ 都是 $x$ 的实函数. 特别地, $Q_{j,1}(x)(j=1,2,\cdots,k)$ 是多项式, 满

足 $\deg Q_{j,1} \leqslant m_j$. 于是, 我们有

$$\begin{aligned} g_2(x) &= \mathrm{e}^{-w_2 x}\frac{\mathrm{d}^{m_1+1}g_1(x)}{\mathrm{d}x^{m_1+1}} \\ &= Q_{2,2}(x) + \sum_{j=3}^{k} Q_{j,2}(x)\mathrm{e}^{(w_j-w_2)x} + \sum_{j=k+1}^{n} Q_{j,2}(x)\mathrm{e}^{\mathrm{Re}(w_j)x-w_2x-\mathrm{Im}(w_j)y}, \end{aligned}$$

这里

$$\begin{aligned} Q_{j,2}(x) &= \mathrm{e}^{-w_j x}\frac{\mathrm{d}^{m_1+1}}{\mathrm{d}x^{m_1+1}}\left(Q_{j,1}(x)\mathrm{e}^{w_j x}\right), \ j=2,\cdots,k, \\ Q_{j,2}(x) &= \mathrm{e}^{-\mathrm{Re}(w_j)x}\frac{\mathrm{d}^{m_1+1}}{\mathrm{d}x^{m_1+1}}\left(Q_{j,1}(x)\mathrm{e}^{\mathrm{Re}(w_j)x}\right), \ j=k+1,\cdots,n \end{aligned}$$

也是 $x$ 的实函数. 特别地, $Q_{j,2}(x)(j=2,\cdots,k)$ 是多项式, 满足 $\deg Q_{j,2} \leqslant m_j$.

由 Rolle 中值定理, $g_2(x)$ 在 $I(y)$ 上至少有 $m_2+\cdots+m_k+k-1$ 个零点. 由归纳法, 我们得到下面的函数

$$g_k(x) = Q_{k,k}(x) + \sum_{j=k+1}^{n} Q_{j,k}(x)\mathrm{e}^{\mathrm{Re}(w_j)x-w_kx-\mathrm{Im}(w_j)y},$$

这里 $Q_{k,k}(x)$ 是多项式, 满足 $\deg Q_{k,k} \leqslant m_k$.

由 Rolle 中值定理, $g_k(x)$ 在 $I(y)$ 上至少有 $m_k+1$ 个零点. 令

$$Q_{k,k}(x) = \frac{A_{k,1}}{(m_k)!}x^{m_k} + \frac{A_{k,2}}{(m_k-1)!}x^{m_k-1} + \cdots + A_{k,m_k+1}, \tag{5.4.13}$$

$$Q_{k,1}(x) = \frac{A_{1,1}}{(m_k)!}x^{m_k} + \frac{A_{1,2}}{(m_k-1)!}x^{m_k-1} + \cdots + A_{1,m_k+1}, \tag{5.4.14}$$

这里系数 $A_{1,l}$, $A_{k,l}(l=1,\cdots,m_k+1)$ 是 $y$ 的函数. 由上面的过程, 我们断言存在非奇异的 $(m_k+1)\times(m_k+1)$ 常数矩阵 $A$, 满足

$$(A_{k,1}, A_{k,2}, \cdots, A_{k,m_k+1}) = (A_{1,1}, A_{1,2}, \cdots, A_{1,m_k+1})A. \tag{5.4.15}$$

现在我们证明 (5.4.15). 记 $A_j = (A_{j,1}, A_{j,2}, \cdots, A_{j,m_k+1})$, 这里 $A_{j,1}$, $A_{j,2}$, $\cdots$, $A_{j,m_k+1}$ 是 $Q_{k,j}(x)$, $(j=1,2,\cdots,k)$ 的系数. 根据上面的过程, 我们有

$$Q_{k,j+1}(x) = \mathrm{e}^{-(w_k-w_j)x}\frac{\mathrm{d}^{m_j+1}}{\mathrm{d}x^{m_j+1}}\left(Q_{k,j}(x)\mathrm{e}^{(w_k-w_j)x}\right), j=1,\cdots,k-1.$$

置 $A_{j+1} = A_jA_{j,j+1}$, 这里 $A_{j,j+1}$ 是从 $A_j$ 到 $A_{j+1}$ 的变换阵.

通过计算, 我们有

$$A_{j,j+1} = \begin{pmatrix} (w_k - w_j)^{m_j+1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,m_k+1} \\ 0 & (w_k - w_j)^{m_j+1} & \cdots & a_{2,m_k+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & (w_k - w_j)^{m_j+1} \end{pmatrix},$$

这里 $a_{i,j}$ 是常数. 令

$$A = A_{1,2}A_{2,3}\cdots A_{k-1,k}.$$

由此可知 $A$ 非奇异并且 $A_k = A_1 A$, 因此 (5.4.15) 得到了证实. 从而我们有

$$(A_{1,1}, A_{1,2}, \cdots, A_{1,m_k+1}) = (A_{k,1}, A_{k,2}, \cdots, A_{k,m_k+1})A^{-1}, \tag{5.4.16}$$

这里 $A^{-1}$ 是 $A$ 的逆阵.

再由 Rolle 中值定理, 对任何 $t = 0, 1, \cdots, m_k$, $g_k^{(t)}(x)$ 至少有一个零点 $x_t \in I(y)$, 这里

$$\begin{aligned} g_k^{(t)}(x) &= \frac{\mathrm{d}^t Q_{k,k}(x)}{\mathrm{d}x^t} + \sum_{j=k+1}^{n} \frac{\mathrm{d}^t}{\mathrm{d}x^t}\left[Q_{j,k}(x)\mathrm{e}^{\mathrm{Re}(w_j)x - w_k x - \mathrm{Im}(w_j)y}\right] \\ &= \frac{A_{k,1}}{(m_k - t)!}x^{m_k - t} + \frac{A_{k,2}}{(m_k - t - 1)!}x^{m_k - t - 1} + \cdots + A_{k,m_k - t+1} \\ &\quad + \sum_{j=k+1}^{n} \frac{\mathrm{d}^t}{\mathrm{d}x^t}\left[Q_{j,k}(x)\mathrm{e}^{\mathrm{Re}(w_j)x - w_k x - \mathrm{Im}(w_j)y}\right]. \end{aligned} \tag{5.4.17}$$

令

$$R_t = -\sum_{j=k+1}^{n} \frac{\mathrm{d}^t}{\mathrm{d}x^t}\left[Q_{j,k}(x)\mathrm{e}^{\mathrm{Re}(w_j)x - w_k x - \mathrm{Im}(w_j)y}\right]\Bigg|_{x=x_t}. \tag{5.4.18}$$

则我们有

$$\begin{aligned} &\frac{A_{k,1}}{(m_k - t)!}(x_t)^{m_k - t} + \frac{A_{k,2}}{(m_k - t - 1)!}(x_t)^{m_k - t - 1} + \cdots + A_{k,m_k - t}x_t \\ &+ A_{k,m_k - t+1} = R_t, \ (t = 0, 1, \cdots, m_k). \end{aligned} \tag{5.4.19}$$

由此即得

$$A_{k,1} = R_{m_k}, \tag{5.4.20}$$

$$A_{k,m_k-t+1}=R_t-\frac{A_{k,1}}{(m_k-t)!}(x_t)^{m_k-t}-\cdots-A_{k,m_k-t}(x_t). \tag{5.4.21}$$

由于对 $x\in I(y)$ 有

$$\begin{aligned}\operatorname{Re}(w_j)x-w_kx-\operatorname{Im}(w_j)y&\leqslant|\operatorname{Re}(w_j)-w_k||x|-\operatorname{Im}(w_j)y\\&\leqslant[|\operatorname{Re}(w_j)-w_k|\tan\varepsilon-\operatorname{Im}(w_j)]y,\end{aligned}$$

并且对 $j=k+1,\cdots,n$ 有 $|\operatorname{Re}(w_j)-w_k|\tan\varepsilon-\operatorname{Im}(w_j)<0$, 于是从 (5.4.18) 式, (5.4.20)~(5.4.21) 式得

$$A_{k,l}=O(\mathrm{e}^{-cy}),\ (l=1,2,\cdots,m_k)\ 当\ \ y\to+\infty, \tag{5.4.22}$$

这里 $c$ 是正常数. 这里我们也用了如下事实: 对 $x\in I(y)$, 当 $y\to+\infty$ 时有 $Q_{j,s}(x)=O(y^{m_j}),(1\leqslant s\leqslant k,s\leqslant j\leqslant n)$.

从而由 (5.4.16) 式和 (5.4.22) 式知, 当 $y\to+\infty$ 时, 有

$$A_{1,l}=O(\mathrm{e}^{-cy}),\ (l=1,2,\cdots,m_k)\ . \tag{5.4.23}$$

由于 $P_k(z)$ 是首一多项式, 我们有

$$P_k(z)=P_k(x+\mathrm{i}y)=(x+\mathrm{i}y)^{m_k}+\cdots=U(x,y)+\mathrm{i}V(x,y),$$

这里 $U(x,y)$ 和 $V(x,y)$ 是 $x$ 和 $y$ 的二元实多项式. 通过计算, 我们有

$$Q_{k,1}(x)=\sin(w_ky)x^{m_k}+\cdots+[V(0,y)\cos(w_ky)+U(0,y)\sin(w_ky)].$$

于是有

$$A_{1,1}=\sin(w_ky), \tag{5.4.24}$$

$$A_{1,m_k+1}=V(0,y)\cos(w_ky)+U(0,y)\sin(w_ky). \tag{5.4.25}$$

由 (5.4.23)~(5.4.25) 式, 并注意到 $U(0,y)$ 和 $V(0,y)$ 是 $y$ 的实多项式知, 当 $y\to+\infty$ 时有

$$[V(0,y)]^2=[A_{1,m_k+1}-U(0,y)A_{1,1}]^2+[V(0,y)A_{1,1}]^2\to0.$$

由此即得

$$\operatorname{Im}(P_k(\mathrm{i}y))=V(0,y)\equiv0, \tag{5.4.26}$$

这与我们的假设矛盾. 这就证明了我们的断言.

由于在射线 $z=re^{i(\pi/2+\varepsilon)}$ 上, 当 $r\to+\infty$ 时, 有 $F(z)=P_1(z)+o(1)$, 并且在射线 $z=re^{i(\pi/2-\varepsilon)}$ 上, 当 $r\to+\infty$ 时, 有 $F(z)=e^{w_k z}[P_k(z)+o(1)]$. 于是存在一个正数, 设为 $Y_1>2Y_0$, 使得当 $z$ 在线段 $\{z=re^{i(\pi/2+\varepsilon)}:Y_1/\cos\varepsilon\leqslant r\leqslant y/\cos\varepsilon\}$ 上滑动时, 辐角 $\arg F(z)$ 的变化量的绝对值不超过 $1/2$, 并且当 $z$ 在线段 $\{z=re^{i(\pi/2-\varepsilon)}:Y_1/\cos\varepsilon\leqslant r\leqslant y/\cos\varepsilon\}$ 上滑动时, 辐角 $\arg F(z)$ 的变化量, 记为 $\Delta$, 满足

$$|\Delta-w_k(y-Y_1)|\leqslant\frac{1}{2}. \tag{5.4.27}$$

且 $F(z)$ 在线段 $S_1=\{z:\mathrm{Im}(z)=Y_1,|\arg z-\pi/2|\leqslant\varepsilon\}$ 上无零点.

对给定的 $Y>2Y_1$, 取正数 $\delta<\min\{1,Y_0\}$, 使得 $F$ 在 $S_2=\{z:\mathrm{Im}(z)=Y+\delta,|\arg z-\pi/2|\leqslant\varepsilon\}$ 和 $S_3=\{z:\mathrm{Im}(z)=Y-\delta,|\arg z-\pi/2|\leqslant\varepsilon\}$ 上没有零点. 根据断言, 对每个 $S_j(j=1,2,3)$, 如果在 $S_j$ 上有 $\mathrm{Im}(F)\not\equiv0$, 那么 $\mathrm{Im}(F)$ 在 $S_j$ 上至多有 $\sum\limits_{j=1}^{k}(m_j+1)-1$ 个零点. 由此注意到 $F$ 在每个 $S_j$ $(j=1,2,3)$ 上无零点, 辐角 $\arg F(z)$ 在每个 $S_j$ $(j=1,2,3)$ 上的变化量的绝对值至多是 $\pi\sum\limits_{j=1}^{k}(m_j+1)$.

令

$$\begin{aligned}D_1&=\{z:Y_1\leqslant\mathrm{Im}(z)\leqslant Y+\delta,|\arg z-\pi/2|\leqslant\varepsilon\},\\D_2&=\{z:Y_1\leqslant\mathrm{Im}(z)\leqslant Y-\delta,|\arg z-\pi/2|\leqslant\varepsilon\}.\end{aligned}$$

用 $\Delta_{\partial D}\arg F(z)$ 表示当 $z$ 沿着 $D$ 的正向边界滑动时, 辐角 $\arg F(z)$ 的总变化量. 根据上面的讨论和 (5.4.27), 我们有

$$\begin{aligned}\Delta_{\partial D_1}\arg F(z)&\leqslant w_k(Y+\delta-Y_1)+1+2\pi\sum_{j=1}^{k}(m_j+1)\\&\leqslant w_kY+O(1),\\\Delta_{\partial D_2}\arg F(z)&\geqslant w_k(Y-\delta-Y_1)-1-2\pi\sum_{j=1}^{k}(m_j+1)\\&\geqslant w_kY-O(1).\end{aligned}$$

由辐角原理, $F$ 在 $D_1$ 内的零点个数至多为 $\frac{w_k}{2\pi}Y+O(1)$, 而 $F$ 在 $D_2$ 内的零点个数至少为 $\frac{w_k}{2\pi}Y-O(1)$. 于是 $F$ 在 $\{z:\mathrm{Im}(z)\leqslant Y,\ |\arg z-\pi/2|\leqslant\varepsilon\}$ 内的零点个数等于 $\frac{w_k}{2\pi}Y+O(1)$.

这就证明了 (5.4.11) 和 (5.4.6). 引理证毕. □

**引理 5.4.2** 设 $g$ 是一个非常数的整函数, 其级 $\rho(g)\leqslant1$, $k\geqslant2$ 是一整数; $a$

是一非零有限常数. 若 $g(z)=0 \Longrightarrow g'(z)=a$, $g'(z)=a \Longrightarrow g^{(k)}(z)=0$, 则有

$$g(z)=a(z-z_0), \tag{5.4.28}$$

其中 $z_0$ 是常数.

**证明** 先考虑 $g$ 是非常数多项式的情形. 由于 $g(z)=0 \Longrightarrow g'(z)=a$, $g$ 的所有零点均为单级零点. 于是可设

$$g(z)=a_l\prod_{j=1}^{l}(z-z_j),$$

这里 $a_l(\neq 0)$ 为常数, $z_j(1\leqslant j\leqslant l)$ 是 $g$ 的互不相同的零点. 从而由 $g(z)=0 \Longrightarrow g'(z)=a$ 可知, $l-1$ 次多项式 $g'-a$ 有 $l$ 个互不相同的零点. 这导致 $g'(z)-a\equiv 0$. 于是 $l=1$. 从而我们有 (5.4.28).

现在考虑 $g$ 是超越的情形. 用引理 4.3.1 的证明中用过的方法, 我们可知

$$P=\frac{g^{(k)}}{g} \tag{5.4.29}$$

是一个非零常数. 取常数 $c$ 满足 $c^k=1/P$, 并令 $f(z)=g(cz)$, 则由 (5.4.29) 可得

$$f^{(k)}\equiv f \tag{5.4.30}$$

和

$$f(z)=0 \Longleftrightarrow f'(z)=ac. \tag{5.4.31}$$

解方程 (5.4.30) 得

$$f(z)=\sum_{j=0}^{k-1}C_j\exp(\omega^j z), \tag{5.4.32}$$

其中 $\omega=\exp(2\pi i/k)$, $C_j$ $(j=0,1,2,\cdots,k-1)$ 是常数.

由于 $f$ 是超越的, 于是存在 $C_j\in\{C_0,C_1,\cdots,C_{k-1}\}$ 使得 $C_j\neq 0$. 记 $\{C_j\}$ 中的非零常数为 $C_{j_m}$ $(0\leqslant j_m\leqslant k-1,\ m=0,1,\cdots,s,\ s\leqslant k-1)$, 则有

$$f(z)=\sum_{m=0}^{s}C_{j_m}\exp(\omega^{j_m}z). \tag{5.4.33}$$

于是由 (5.4.31) 即得 $s\geqslant 1$. 以下我们不妨设 $0\leqslant j_0<j_1<\cdots<j_s\leqslant k-1$. 现在我们考虑两种情形.

**情形 1** 设以 $\overline{\omega}^{j_m}(0\leqslant m\leqslant s)$ 为顶点的凸多边形 $\Omega$ 的某条边 $\partial_1$, 设其端点为 $\overline{\omega}^{j_0}$ 和 $\overline{\omega}^{j_1}$, 不经过原点.

此时我们记

$$F(z)=-\omega^{j_0}f(z)+f'(z)-ac. \tag{5.4.34}$$

由 (5.4.31) 可知有

$$f(z)=0\Longrightarrow F(z)=0, \tag{5.4.35}$$

并且由 (5.4.33) 可知有

$$F(z)=-ac+\sum_{m=1}^{s}C_{j_m}(\omega^{j_m}-\omega^{j_0})\exp(\omega^{j_m}z). \tag{5.4.36}$$

现在设 $\Omega$ 在边 $\partial_1$ 上的外法向为 $h_1:\arg z=\theta_1$. 则由引理 5.4.1 可知, 有 $n(Y,\theta_1,\varepsilon;f)=\dfrac{|\partial_1|}{2\pi}Y+O(1)$ 和 $n(Y,\theta_1,\varepsilon;F)=O(1)$. 但由 (5.4.35) 可知有 $n(Y,\theta_1,\varepsilon;f)\leqslant n(Y,\theta_1,\varepsilon;F)$. 由此立得矛盾.

**情形 2** 若情形 1 不可能发生, 那么此时必有 $s=1$, 并且 $\omega^{j_1}=-\omega^{j_0}$. 因此可将 $f(z)$ 写为

$$f(z)=Le^{\lambda z}-LK^2e^{-\lambda z}, \tag{5.4.37}$$

这里 $\lambda$, $L$ 和 $K$ 为非零常数. 于是

$$f'(z)=L\lambda e^{\lambda z}+LK^2\lambda e^{-\lambda z}. \tag{5.4.38}$$

现在分别取 $z_1$ 和 $z_2$, 使得有 $e^{\lambda z_1}=K$ 和 $e^{\lambda z_2}=-K$. 则由 (5.4.37) 有 $f(z_1)=f(z_2)=0$, 因此由 (5.4.31) 有 $f'(z_1)=f'(z_2)=ac$. 但 $f'(z_1)=2L\lambda K$, $f'(z_2)=-2L\lambda K$. 从而 $2ac=f'(z_1)+f'(z_2)=0$. 与 $ac\neq 0$ 矛盾. 于是引理 5.8 得证. □

**定理 5.4.2 的证明** 我们不妨设 $D$ 为单位圆盘 $\Delta$. 假定 $\mathcal{F}$ 在 $\Delta$ 内不正规, 则由引理 3.1.3 知, 存在 $f_n\in\mathcal{F}$, $z_n\in\Delta$, $|z_n|<r<1$, 和 $\rho_n\to 0^+$, 使得 $g_n(\zeta)=\rho_n^{-1}f_n(z_n+\rho_n\zeta)$ 在复平面 $\mathbb{C}$ 上按球距内闭一致收敛到一个非常数的整函数 $g$, 且满足 $g^{\#}(\zeta)\leqslant g^{\#}(0)=|d|+2$, 其中 $d=\max\{|a(z)|:|z|\leqslant 1\}$. 由定理 1.3.3 知, $g$ 的级至多为 1. 不妨设 $z_n\to z_0\in\Delta$.

像在定理 4.7 的证明中一样, 我们可证明有

(i) $g(\zeta)=0\Longrightarrow g'(\zeta)=a(z_0)$;

(ii) $g'(\zeta)=a(z_0)\Longrightarrow g^{(k)}(\zeta)=0$.

于是由引理 5.4.2 知, $g(\zeta) = a(z_0)(\zeta - \zeta_1)$, 从而有 $g^{\#}(0) \leqslant |a(z_0)| < |d| + 2$, 这与 $g^{\#}(0) = |d| + 2$ 矛盾.

于是 $\mathcal{F}$ 在 $\Delta$ 内, 从而也在 $D$ 内正规. 定理 5.4.2 得证. □

常建明和方明亮 [39] 推广了定理 5.4.1, 证明了

**定理 5.4.3** 设 $\mathcal{F}$ 是区域 $D$ 内的一族全纯函数, $a(z)$ 是一个在 $D$ 内满足 $a'(z) \not\equiv a(z)$ 的全纯函数. 若对于每个 $f \in \mathcal{F}$, $f(z) = a(z) \Longleftrightarrow f'(z) = a(z) \Longleftrightarrow f''(z) = a(z)$, $f(z) - a(z) = 0 \to f'(z) - a(z) = 0$, 则 $\mathcal{F}$ 在 $D$ 内正规.

这里 $f(z) - a(z) = 0 \to f'(z) - a(z) = 0$ 表示: 如果 $z_0$ 是 $f(z) - a(z)$ 的一个 $n$ 重零点, 那么 $z_0$ 是 $f'(z) - a(z)$ 的一个至少 $n$ 重的零点.

由定理 5.4.3 即得

**推论** 设 $\mathcal{F}$ 是区域 $D$ 内的一族全纯函数. 若对于每个 $f \in \mathcal{F}$, $f$ 和 $f'$, $f''$ 在 $D$ 内有相同的不动点, 则 $\mathcal{F}$ 在 $D$ 内正规.

下面的两例表明定理 5.4.3 中条件 $a'(z) \not\equiv a(z)$ 和 $f(z) - a(z) = 0 \to f'(z) - a(z) = 0$ 都是必要的.

**例 5.4** 设 $D = \{z: |z| < 1\}$, $a(z) = c\mathrm{e}^z$, 这里 $c$ 为常数. 再设 $\mathcal{F} = \{f_n\}$, 这里

$$f_n(z) = \mathrm{e}^{nz} + c\mathrm{e}^z.$$

那么, 对每个 $f \in \mathcal{F}$, 我们有 $f(z) - a(z) \neq 0$, $f'(z) - a(z) \neq 0$ 和 $f''(z) - a(z) \neq 0$. 但 $\mathcal{F}$ 在 $D$ 内不正规.

**例 5.5** 设 $D = \{z: |z| < 1\}$, $a(z) = z^2 + 2z + 2$ 和 $\mathcal{F} = \{f_n : n = 2, 3, \cdots\}$, 这里

$$f_n(z) = nz^3 + z^2 + 2z + 2.$$

那么, 对每个 $f_n(z) = nz^3 + z^2 + 2z + 2 \in \mathcal{F}$, 我们有

$$\begin{aligned} f_n(z) - a(z) &= nz^3, \\ f_n'(z) - a(z) &= (3n-1)z^2, \\ f_n''(z) - a(z) &= (6n - 2 - z)z. \end{aligned}$$

因此 $f_n(z) - a(z)$, $f_n'(z) - a(z)$ 和 $f_n''(z) - a(z)$ 在 $D$ 内有相同的零点. 但 $\mathcal{F}$ 在 $D$ 内不正规.

定理 5.4.3 的证明较长, 请参看文献 [39], 与之相关的结果参看文献 [219]. 文献 [195] 考虑了比定理 5.4.3 更一般的情形.

# 第 6 章　其他类型的正规定则

与函数的复合、迭代以及不动点相关的亚纯函数族的正规性是最近亚纯函数族理论研究中人们比较关注的课题，本章将介绍这方面及其相关的方面最近所获得的研究成果.

## 6.1　涉及迭代与不动点的正规定则

设 $f(z)$ 为一亚纯函数. 点 $z_0$ 称为 $f(z)$ 的不动点, 如果 $f(z_0)=z_0$. 对于 $f(z)$ 的不动点 $z_0$, 如果 $|f'(z_0)|<1(=1,>1)$, 则称 $z_0$ 是 $f(z)$ 的吸性不动点 (中性不动点, 排斥不动点).

1992 年, 杨乐 [208] 提出如下问题:

**问题 6.1**　*设 $\mathcal{F}$ 是一族整函数, $k(\geqslant 2)$ 是一个正整数, $D$ 是复平面上的一个区域. 若对于 $\mathcal{F}$ 中的任意函数 $f$, $f$ 和它的 $k$ 次迭代 $f^k$ 在 $D$ 内都没有不动点, 问 $\mathcal{F}$ 在 $D$ 内是否正规?*

1998 年, Essén 和伍胜健 [64] 肯定地回答了上述问题, 他们证明了

**定理 6.1.1**　*设 $\mathcal{F}$ 是区域 $D$ 内的一族全纯函数. 若对于 $\mathcal{F}$ 中的任意函数 $f$, 存在 $k=k(f)\geqslant 2$, 使得 $f$ 的 $k$ 次迭代 $f^k$ 在 $D$ 内没有不动点, 则 $\mathcal{F}$ 在 $D$ 内正规.*

为了证明定理 6.1.1, 需要如下引理.

**引理 6.1.1**[3, 96]　*设 $f(z)$ 在 $\{z:\ |z|<r\leqslant\infty\}$ 内全纯, $\Delta_j(j=1,2,3)$ 是复平面 $\mathbb{C}$ 上的三个开圆盘, 并且其闭圆盘 $\overline{\Delta}_j(j=1,2,3)$ 互不相交, 则存在仅依赖于 $r$ 与 $\Delta_j(j=1,2,3)$ 而不依赖于 $f$ 的常数 $C$, 使得只要 $f$ 的球面导数 $f^{\#}$ 满足*

$$f^{\#}(0)=\frac{|f'(0)|}{1+|f(0)|^2}>C,$$

*则存在一区域 $\Omega\subset\{|z|<r\}$, 及 $j\in\{1,2,3\}$, 使得 $f$ 将 $\Omega$ 单叶映射到 $D_j$ 上.*

**引理 6.1.2**　*设 $z_0\in D$, $\{f_n\}$ 是区域 $D$ 内的全纯函数序列, 且在 $D\backslash\{z_0\}=D^0$ 内正规, 但没有子序列在 $z_0$ 处正规, 则对于每一个满足 $\Delta(z_0,r)\subset D$ 的 $r$, 存在 $n_0=n_0(r)$ 使得当 $n\geqslant n_0$ 时, $f_n$ 在 $\Delta(z_0,r)=\{z:\ |z-z_0|<r\}$ 内存在不动点.*

**证明**　不妨设 $D$ 是单位圆, $z_0=0$. 取定 $r(0<r<1)$. 因为 $\{f_n\}$ 在 $D^0$ 内正规, 于是我们可以找到 $\{f_n\}$ 的子列仍记为 $\{f_n\}$, 使得当 $n\to\infty$ 时, $f_n$ 在 $\{z:\ r_1<|z|<r_2\}$ 内一致收敛于 $f$, 其中 $0<r_1<r<r_2<1$, 则或者 $f\equiv\infty$, 或者

$f$ 在 $\{z: r_1 < |z| < r_2\}$ 内解析. 若 $f$ 在 $\{z: r_1 < |z| < r_2\}$ 内解析, 则由最大模原理知, $|f_n(z)|$ 在 $\overline{\Delta}(0,r)$ 上一致有界, 所以 $\{f_n\}$ 在 $z_0 = 0$ 处正规, 矛盾. 因此 $f \equiv \infty$.

我们断言: 对于充分大的 $n$, $f_n$ 在 $\Delta(0,r)$ 内有零点. 否则, 函数族 $\{f_n\}$ 在 $z=0$ 处正规, 与我们的假设矛盾. 因为 $f_n$ 在 $C(0,r) = \{z: |z| = r\}$ 上一致收敛于 $\infty$, 所以存在 $n_0$, 使得当 $n \geqslant n_0$ 时, 在 $C(0,r)$ 上 $|f_n(z)| > r$. 于是当 $n \geqslant n_0$ 时, 我们有

$$|(f_n(z) - z) - f_n(z)| = |z| = r < |f_n(z)|, \ |z| = r.$$

若 $f_n(z)$ 在 $\Delta(0,r)$ 内有零点, 则由 Rouché 定理知, $f_n(z) - z$ 在 $\Delta(0,r)$ 内必有零点. 于是即得对于充分大的 $n$, $f_n$ 在 $\Delta(0,r)$ 内有不动点.

因为 $\{f_n\}$ 的每一个子列都有无穷多个函数在 $\Delta(0,r)$ 内有不动点, 所以仅有有穷个 $n$, 使得 $f_n$ 在 $\Delta(0,r)$ 内没有不动点. 引理 6.1.2 得证. □

**引理 6.1.3** *设 $r$ 是一个满足 $0 < r < 1$ 的正数, $f$ 在 $\Delta(0,1) = \{z: |z| < 1\}$ 内全纯, 又设 $\Omega \subset \Delta(0,r)$ 是单连通区域, $f$ 将 $\Omega$ 单叶映射到 $\Delta(0,1)$ 上, 则 $f$ 在 $\Omega$ 内一定存在不动点.*

**证明** 由复变函数论知, $f^{-1}(C(0,1)) = \partial\Omega$, 并且映射是单叶的. 由于 $f$ 在 $\Omega$ 内有零点, 并且有

$$|(f(z) - z) - f(z)| = |z| \leqslant r < 1 = |f(z)|, \ z \in \partial\Omega,$$

于是由 Rouché 定理知, $f(z) - z$ 在 $\Omega$ 内有零点, 即 $f$ 在 $\Omega$ 内有不动点. 引理 6.1.3 得证. □

**定理 6.1.1 的证明** 假如 $\mathcal{F}$ 在 $D$ 内不正规, 则存在 $z_1 \in D$, 使得 $\mathcal{F}$ 在 $z_1$ 处不正规. 由 Marty 定则知, 存在函数列 $f_n \in \mathcal{F}$ 和点列 $z_n^{(1)} \in D, z_n^{(1)} \to z_1$ 使得当 $n \to \infty$ 时, 有

$$f_n^{\#}(z_n^{(1)}) \to \infty.$$

令 $A = \{z: f_n$ 在 $z$ 处不正规 $\}$, 则 $z_1 \in A$. 若 $z_1$ 是 $A$ 的孤立点, 则由引理 6.1.2 知, 对于充分大的 $n$, $f_n$ 有不动点, 矛盾. 因此在 $D$ 内存在无穷多个点 $z_n^{(1)}$, $z_n^{(1)} \to z_1$, 并且 $\{f_n\}$ 在 $z_n^{(1)}$ 处不正规. 因此存在点列 $z_n^{(2)}$ 与 $\{f_n\}$ 的子序列我们仍记为 $\{f_n\}$, 使得 $z_n^{(2)} \to z_2$, 且有

$$f_n^{\#}(z_n^{(2)}) \to \infty.$$

如此同样进行 $p$ 次, 我们就得到 $\mathcal{F}$ 的一个序列 $\{f_n\}$, 一些点 $z_j (1 \leqslant j \leqslant p)$ 和相应的序列 $z_n^{(j)} \to z_j$, 使得对于 $1 \leqslant j \leqslant p$ 有

$$f_n^{\#}(z_n^{(j)}) \to \infty.$$

固定 $j$. 则对于充分大的 $n$, 对于圆盘 $\Delta(z^{(j)},\epsilon)$ 和以点 $z_j(1\leqslant j\leqslant p)$ 为圆心, $3\epsilon$ 为半径的圆盘 $\Delta(z_j,3\epsilon)(1\leqslant j\leqslant p)$ 中的三个圆盘 $D_1,D_2,D_3$, 其中 $\epsilon$ 很小使得闭圆盘 $\overline{\Delta}(z_j,3\epsilon)(1\leqslant j\leqslant p)$ 互不相交. 于是存在一个常数 $C>0$, 使得当 $f^{\#}(z_n^{(j)})\geqslant C$ 时, 存在一区域 $\Omega\subset\Delta(z_n^{(j)},\epsilon)$, 及 $j\in\{1,2,3\}$, 使得 $f$ 将 $\Omega$ 单叶映射到 $\Delta_j$ 上. 取定 $C$ 使得上述结论对 $(1\leqslant j\leqslant p)$ 都成立.

现在选取充分大的 $n$, 使得 $f_n$ 满足上述条件. 记 $f_n=f$, $\Delta_j=\Delta_j(z_j,3\epsilon)$. 若存在区域 $\Omega\subset\Delta(z_j,3\epsilon/2)$, 使得 $f(\Omega)=\Delta_{j'}=\Delta(z_{j'},3\epsilon)$ 并且映射 $f:\Omega\to\Delta_{j'}$ 是单叶的, 则记为 $\Delta_j\Longrightarrow\Delta_{j'}$.

以下我们证明对于 $\{f_n\}$ 中的 $f$, 当 $k>1$ 时, $f^k$ 有不动点.

在圆盘 $\Delta(z_j,3\epsilon)(1\leqslant j\leqslant p)$ 中选取一个 $\Delta_j$, 则存在 $j'\in\{1,2,\cdots,p\}$ 使得 $\Delta_j\Longrightarrow\Delta_{j'}$. 如果 $j=j'$, 则由引理 6.2 知, $f$ 有不动点, 因此对于所有的 $k\geqslant 1$, $f^k$ 有不动点, 矛盾. 因此现在假设 $j\neq j'$.

我们断言：对于 $p\geqslant 5$, 有

i) 在 $\Delta(z_j,3\epsilon)(1\leqslant j\leqslant p)$ 中存在圆盘 $A$, $B$ 和 $C$, 使得 $A\Longrightarrow C$, $B\Longrightarrow C$.

ii) 在 $\Delta(z_j,3\epsilon)(1\leqslant j\leqslant p)$ 中存在圆盘 $A$, $C$, 使得 $A\Longrightarrow C$, $C\Longrightarrow A$.

事实上, 在 $\Delta(z_j,3\epsilon)(1\leqslant j\leqslant p)$ 中取圆盘 $A_j(1\leqslant j\leqslant 3)$ 和 $D'$, $D''$. 取定 $j$, 由于 $A_j\Longrightarrow A_j$ 不成立, 因此我们有, 或者 $A_j\Longrightarrow D'$ 或者 $A_j\Longrightarrow D''$. 于是圆盘 $A_j(1\leqslant j\leqslant 3)$ 存在两个不妨记为 $A,B$, $D'$, $D''$ 中有一个不妨记为 $C$ 使得 $A\Longrightarrow C$, $B\Longrightarrow C$. 于是断言 i) 得证.

对于 i) 中的圆盘 $A$, $B$ 和 $C$, 由于 $C\Longrightarrow C$ 不成立, 因此我们有, 或者 $C\Longrightarrow A$ 或者 $C\Longrightarrow B$. 于是断言 ii) 得证.

由断言 ii) 可知, $f^2$ 有不动点, 于是 $k=2$ 得证.

下面考虑 $k=3$ 的情形. 对于 i) 中的圆盘 $A$, $B$ 和 $C$, 在 $\Delta(z_j,3\epsilon)(1\leqslant j\leqslant p)$ 中选取不同于圆盘 $A$, $B$ 和 $C$ 的圆盘 $D$, 使得 $C\Longrightarrow D$. 如果 $D\Longrightarrow A$, 则有 $A\Longrightarrow C\Longrightarrow D\Longrightarrow A$, 由此可知 $f^3$ 有不动点, 如果 $D\Longrightarrow B$, 同理 $f^3$ 有不动点. 于是 $k=3$ 得证.

对于 $k\geqslant 3$ 的情形我们同样论证. 对于 i) 中的 $A,B$ 和 $C=C_1$. 由于 $p\geqslant 5$, 于是在圆盘 $\Delta(z_j,3\epsilon)(1\leqslant j\leqslant p)$ 中, 存在 $C_2$ 使得

$$C_2\neq A,\ B,\ C_1\Longrightarrow C_2.$$

所以我们在圆盘 $\Delta(z_j,3\epsilon)(1\leqslant j\leqslant p)\setminus\{A,B\}$ 中可以类似找到 $\{C_j\}_{j=2}^{k-1}$ 使得

$$C_j\Longrightarrow C_{j+1},\ j=1,2,\cdots,k-2.$$

由于 $C_{k-1}\neq A,\ B$, 于是我们知道, 或者 $C_{k-1}\Longrightarrow A$ 或者 $C_{k-1}\Longrightarrow B$. 如果

$C_{k-1} \Longrightarrow A$, 则有

$$A \Longrightarrow C_1 \Longrightarrow C_2 \cdots \Longrightarrow C_{k-1} \Longrightarrow A,$$

由此可知 $f^k$ 有不动点; 同理, 如果 $C_{k-1} \Longrightarrow B$, 则 $f^k$ 也有不动点. 于是对于每个 $k>1$, $f^k$ 有不动点, 与假设矛盾. 于是证得 $\mathcal{F}$ 在 $D$ 内正规. □

**注** Essén 和伍胜健 [65] 进一步证明了定理 6.1.1 中将 $f$ 的 $k$ 次迭代 $f^k$ 在 $D$ 内没有不动点换为 $f$ 的 $k$ 次迭代 $f^k$ 在 $D$ 内没有排斥不动点, 结论仍然成立. 请参看文献 [65].

根据问题 6.1, 我们自然提出如下问题.

**问题 6.2** 设 $\mathcal{F}$ 是区域 $D$ 内的一族亚纯函数, $k \geqslant 2$ 是一个正整数. 若对于 $\mathcal{F}$ 中的任意函数 $f$, $f$ 和它的 $k$ 次迭代 $f^k$ 在 $D$ 内都没有不动点, 问 $\mathcal{F}$ 在 $D$ 内是否正规?

常建明和方明亮 [38] 肯定地回答了这个问题, 他们证明了

**定理 6.1.2′** 设 $\mathcal{F}$ 是区域 $D$ 内的一族亚纯函数, $k \geqslant 2$ 是一个正整数. 若对于 $\mathcal{F}$ 中的任意函数 $f$, 它的 $k$ 次迭代 $f^k$ 在 $D$ 内没有不动点, 则 $\mathcal{F}$ 在 $D$ 内正规.

证明定理 6.1.2 需要如下引理.

**引理 6.1.4**[16] 设 $f$ 是一个超越亚纯函数, $k(\geqslant 2)$ 是一个正整数, 则 $f$ 的 $k$ 次迭代 $f^k$ 在 $\mathbb{C}$ 内有无穷多个不动点.

**引理 6.1.5** 设 $R$ 是一个有理函数, 且 $R(z) \neq z + c$, 其中 $c$ 是任意非零有穷复数, $k(\geqslant 2)$ 是一个整数, 则 $R^k$ 至少有一个不动点 $a$, 对于 $0 \leqslant j \leqslant k$, 都有 $R^j(a) \in \mathbb{C}$.

**证明** 若 $R$ 在 $\mathbb{C}$ 内有一个不动点 $a$, 则结论成立. 以下设 $R$ 在 $\mathbb{C}$ 内没有不动点, 于是有

$$R(z) = z + \frac{c}{P(z)}, \tag{6.1.1}$$

其中 $P$ 是一个首项系数为 1, 次数为 $m(\geqslant 1)$ 的多项式, $c \neq 0$ 是一个常数.

我们断言: 对于任意正整数 $j$, 有

$$R^j(z) = z + \frac{Q_j(z)}{P_j(z)}, \tag{6.1.2}$$

其中 $P_j$ 和 $Q_j$ 是互素的多项式并且满足如下两式

$$Q_j(z) = jcz^{(m+1)^j-1-m} + \cdots + q_{j,1}z + q_{j,0}, \tag{6.1.3}$$

$$P_j(z) = z^{(m+1)^j-1} + \cdots + p_{j,1}z + p_{j,0}. \tag{6.1.4}$$

显然, 当 $j=1$ 时, 断言成立. 现在假设上述断言对 $j(>1)$ 成立. 我们下面证明上述断言对 $j+1$ 也成立. 设

$$P(z) = z^m + a_1 z^{m-1} + \cdots + a_m, \tag{6.1.5}$$

其中 $a_i(1 \leqslant i \leqslant m)$ 是常数, 则有

$$\begin{aligned} R^{j+1}(z) &= R[R^j(z)] \\ &= z + \frac{Q_j(z)}{P_j(z)} + \frac{c}{P\left(z + \dfrac{Q_j(z)}{P_j(z)}\right)} \\ &= z + \frac{Q_j(z)}{P_j(z)} + \frac{c[P_j(z)]^m}{H_j(z)} \\ &= z + \frac{Q_j(z)H_j(z) + c[P_j(z)]^{m+1}}{P_j(z)H_j(z)}, \end{aligned} \tag{6.1.6}$$

其中

$$\begin{aligned} H_j(z) &= [zP_j(z) + Q_j(z)]^m + a_1 P_j(z)[zP_j(z) + Q_j(z)]^{m-1} \\ &\quad + \cdots + a_m[P_j(z)]^m \qquad (6.1.7) \\ &= z^{m(m+1)^j} + \cdots + h_{j,1}z + h_{j,0}. \qquad (6.1.8) \end{aligned}$$

设

$$Q_{j+1}(z) = Q_j(z)H_j(z) + c[P_j(z)]^{m+1}, \tag{6.1.9}$$

$$P_{j+1}(z) = P_j(z)H_j(z). \tag{6.1.10}$$

下面我们证明 $P_{j+1}$ 和 $Q_{j+1}$ 是互素的多项式. 如果 $P_{j+1}$ 和 $Q_{j+1}$ 不是互素的多项式, 则在 $\mathbb{C}$ 内存在一点 $z_0$, 使得 $P_{j+1}(z_0) = Q_{j+1}(z_0) = 0$. 于是由 $P_j$ 和 $Q_j$ 互素, 即得 $P_j(z_0) = H_j(z_0) = 0$. 因此由 (6.1.7) 得 $Q_j(z_0) = 0$, 与 $P_j$ 和 $Q_j$ 互素矛盾.

于是由 (6.1.3), (6.1.4) 以及 (6.1.7)~(6.1.10) 即得

$$Q_{j+1}(z) = (j+1)cz^{(m+1)^{j+1}-1-m} + \cdots + q_{j+1,1}z + q_{j+1,0}, \tag{6.1.11}$$

$$P_{j+1}(z) = z^{(m+1)^{j+1}-1} + \cdots + p_{j+1,1}z + p_{j+1,0}. \tag{6.1.12}$$

因此由 (6.1.6), (6.1.11) 和 (6.1.12) 可知上述断言成立.

根据上述断言可知, 在 $\mathbb{C}$ 内, $R^k(z) - z$ 必定有 $(m+1)^k - 1 - m > 0$ 个零点 $a$. 下面我们只需证明不存在这样的零点 $a$, 使得对于任意的 $j < k$, 有 $R^j(a) = \infty$. 假如不是这样, 则存在某个 $a$ 和 $j_0 < k$, 使得 $R^k(a) = a$, 且有 $R^{j_0}(a) = \infty$. 于是有

$$a = R^k(a) = R^{k-j_0}(R^{j_0}(a)) = R^{k-j_0}(\infty) = \infty.$$

矛盾. 引理 6.1.5 得证. □

**定理 6.1.2 的证明** 由 $f^k$ 在 $D$ 内没有不动点可知, $f$ 在 $D$ 内没有不动点. 令

$$\mathcal{G}=\{g=f-\mathrm{id}:\ f\in\mathcal{F}\},$$

其中 id 是恒等函数. 于是对于任意的 $g\in\mathcal{G}$, $z\in D$ 有 $g(z)\neq 0$.

显然, $\mathcal{F}$ 在 $D$ 内正规当且仅当 $\mathcal{G}$ 在 $D$ 内正规. 假如 $\mathcal{G}$ 在 $D$ 内不正规, 则由引理 3.1.3 知, 存在点列 $z_n\to z_0$, 正数列 $\rho_n\to 0^+$ 和函数列 $g_n=f_n-id\in\mathcal{G}$, 使得 $G_n(\zeta)=\dfrac{g_n(z_n+\rho_n\zeta)}{\rho_n}$ 在 $\mathbb{C}$ 上按球距内闭一致收敛到一个非常数的亚纯函数 $G(\zeta)$. 于是由 Hurwitz 定理知, 对于任意 $\zeta\in\mathbb{C}$ 有 $G(\zeta)\neq 0$.

令

$$M_n(\zeta)=z_n+\rho_n\zeta, \tag{6.1.13}$$

$$H_n(\zeta)=G_n(\zeta)+\zeta. \tag{6.1.14}$$

于是由 $G_n(\zeta)=\dfrac{g_n(z_n+\rho_n\zeta)}{\rho_n}$ 及 (6.1.13)~(6.1.14) 得

$$H_n(\zeta)=\frac{f_n(M_n(\zeta))-z_n}{\rho_n}. \tag{6.1.15}$$

此式与 (6.1.13) 结合得 $M_n(H_n(\zeta))=z_n+\rho_nH_n(\zeta)=f_n(M_n(\zeta))$. 因此我们有

$$H_n^2(\zeta)=H_n(H_n(\zeta))=\frac{f_n(M_n(H_n(\zeta)))-z_n}{\rho_n}=\frac{f_n^2(M_n(\zeta))-z_n}{\rho_n}.$$

根据归纳法得

$$H_n^j(\zeta)=\frac{f_n^j(M_n(\zeta))-z_n}{\rho_n},\ j=1,2,\cdots, \tag{6.1.16}$$

于是有

$$f_n^j(M_n(\zeta))=z_n+\rho_nH_n^j(\zeta),\ j=1,2,\cdots. \tag{6.1.17}$$

由 (6.1.16) 得

$$H_n^j(\zeta)-\zeta=\frac{f_n^j(M_n(\zeta))-M_n(\zeta)}{\rho_n},\ j=1,2,\cdots. \tag{6.1.18}$$

设

$$H(\zeta)=G(\zeta)+\zeta, \tag{6.1.19}$$

$$A = \bigcup_{j=1}^{k+1} H^{-j}(\infty) = \bigcup_{j=1}^{k+1} \{\zeta \in \mathbb{C}:\ H^j(\zeta) = \infty\}. \tag{6.1.20}$$

则由 (6.1.14),(6.1.16), (6.1.19)~(6.1.20) 得知, 对于任意的 $j \in \{1, 2, \cdots, k\}$, 在 $\mathbb{C} \setminus A$ 上, 当 $n \to \infty$ 时, $H_n^j(\zeta)$ 内闭一致收敛到 $H^j(\zeta)$.

若 $H^k(\zeta)$ 在 $\mathbb{C}$ 上有不动点 $\zeta_0$, 则存在一个正数 $\delta$, 使得 $\{\zeta:\ |\zeta - \zeta_0| < \delta\} \subset \mathbb{C} \setminus A$, 且对于 $j \in \{1, 2, \cdots, k-1\}$ 有 $H^j(\zeta_0) \in \mathbb{C}$. 于是由 (6.1.20) 以及 Hurwitz 定理得知, 存在点列 $\zeta_n \to \zeta_0$, 使得 $H_n^k(\zeta_n) = \zeta_n$. 因此由 (6.1.17) 得 $f_n^k(M_n(\zeta_n)) = M_n(\zeta_n)$. 故由 (6.1.16), 对于 $j \in \{1, 2, \cdots, k-1\}$, 当 $n \to \infty$ 时有 $f_n^j(M_n(\zeta_n)) \to z_0 \in D$. 于是即得对于充分大的 $n$, $M_n(\zeta_n)$ 是 $f_n^k$ 在 $D$ 内的不动点, 这与 $f_n^k$ 在 $D$ 内没有不动点矛盾.

因此 $H^k(\zeta)$ 在复平面 $\mathbb{C}$ 上没有不动点.

于是由引理 6.1.4 和引理 6.1.5, 我们得到 $H(\zeta) = \zeta + c$, 其中 $c$ 是一个常数. 由 (6.1.19) 即得 $G(\zeta)$ 是常数, 矛盾.

因此 $\mathcal{G}$ 在 $D$ 内正规, 于是 $\mathcal{F}$ 在 $D$ 内正规. 定理得证. □

下例说明定理 6.1.2 中如将 $f$ 的 $k$ 次迭代 $f^k$ 在 $D$ 内没有不动点换为 $f$ 的 $k$ 次迭代 $f^k$ 在 $D$ 内没有排斥不动点, 结论不再成立.

**例 6.1**　设

$$\mathcal{F} = \left\{ f_n(z) = \frac{1}{nz} : n = 1, 2, \cdots \right\},\ D = \{z:\ |z| < 1\},$$

则 $\mathcal{F}$ 是区域 $D$ 内的一族亚纯函数. 显然, 对于 $\mathcal{F}$ 中的任意函数 $f_n$, 有 $f_n^2 = id$, 其中 $id$ 表示恒等函数. 因此对于任意偶数 $k$ 有 $f_n^k(z) = z$; 而对于任意奇数 $k$ 有 $f_n^k(z) = 1/(nz)$. 这样对于任意正整数 $k$ 及 $\mathcal{F}$ 中的任意函数 $f_n$, $f_n^k$ 在 $D$ 内没有排斥不动点. 但是 $\mathcal{F}$ 在 $z = 0$ 处不正规.

## 6.2　涉及函数复合与不动点的正规定则

前一节, 我们考虑了函数族中任意函数的迭代没有不动点时函数族的正规性. 本节中, 我们将考虑函数族中任意函数与同一个给定函数的复合没有不动点时函数族的正规性.

2000 年, 方明亮和袁文俊 [72, 73] 证明了

**定理 6.2.1**　*设 $\mathcal{F}$ 是区域 $D$ 内的一族全纯函数, $P(z)$ 是一个满足 $\deg P \geqslant 2$ 的多项式. 若对于 $\mathcal{F}$ 中的任意函数 $f$, 复合函数 $P(f(z))$ 没有不动点, 则 $\mathcal{F}$ 在 $D$ 内正规.*

**证明**　我们分两种情形.

**情形 1** $P(z)$ 至少具有两个判别的零点 $a, b$.

假如 $\mathcal{F}$ 在 $D$ 内不正规. 不失一般性, 不妨设 $\mathcal{F}$ 在 $z=0$ 处不正规. 则由引理 3.1.3 知, 存在点列 $z_n \to 0$, 函数列 $f_n \in \mathcal{F}$, 正数列 $\rho_n \to 0^+$, 使得 $g_n(\xi) = f_n(z_n+\rho_n\xi)$ 在复平面 $\mathbb{C}$ 上内闭一致收敛到一个非常数整函数 $g(\xi)$.

所以 $P(f_n(z_n+\rho_n\xi)) - (z_n+\rho_n\xi)$ 在复平面 $\mathbb{C}$ 上内闭一致收敛到 $P(g(\xi))$. 由于 $P(f_n(z_n+\rho_n\xi)) - (z_n+\rho_n\xi) \neq 0$, 于是由 Hurwitz 定理, 得 $P(g(\xi)) \neq 0$. 所以有 $g(\xi) \neq a, b$. 由于 $g(\xi)$ 是整函数, 故由 Picard 定理知, $g(\xi)$ 是常数, 矛盾.

**情形 2** $P(z)$ 仅有一个零点. 于是 $P(z) = (az-b)^n \quad (a \neq 0, n \geqslant 2)$.

我们断言: 对于 $D$ 内任意点 $z_0 \neq 0$, $\mathcal{F}$ 在 $z_0$ 处正规.

事实上, 使用与情形 1 类似的方法可得 $P(g(\xi)) \neq z_0$. 即 $(ag(\xi)-b)^n \neq z_0$. 因此 $g(\xi)$ 不取 $n$ 个判别的值 $(1/a)(z_0^{1/n}+b)$. 于是 $g(\xi)$ 是常数, 矛盾.

下面我们证明 $\mathcal{F}$ 在 $z_0=0$ 处正规.

在 $\mathcal{F}$ 中任取函数列 $\{f_n(z)\}$, $\{C_r := z: \ |z|=r\}$, 则由前面的论证得 $\{f_n(z)\}$ 在 $C_r$ 上正规. 因此存在一子列 $\{f_{n_k}\}$, 使其在 $C_r$ 上一致收敛到一个函数 $g(z)$(解析或 $\infty$).

如果 $g(z) \not\equiv \infty$, 则 $g(z)$ 在 $C_r$ 上解析. 因此存在一个正整数 $N$ 和一个正数 $M$ 使得, 当 $z \in C_r$ 时, 对于任意的正整数 $k \geqslant N$ 有

$$|f_{n_k}(z)| \leqslant M.$$

于是由最大模原理得知, 当 $|z| \leqslant r$ 时, 对于任意的正整数 $k \geqslant N$ 有

$$|f_{n_k}(z)| \leqslant M.$$

即得 $\{f_{n_k}(z)\}$ 在 $z=0$ 处正规. 因此 $\{f_{n_k}(z)\}$ 存在内闭一致收敛的子列, 即 $\{f_n(z)\}$ 存在内闭一致收敛的子列.

如果 $g(z) \equiv \infty$, 则对于任意大的正数 $M>1$, 存在正整数 $N$, 使得当 $z \in C_r$ 时, 对于任意的正整数 $k \geqslant N$ 有

$$|P(f_{n_k}(z))| \geqslant M.$$

于是, 当 $z \in C_r$ 时, 对于任意的正整数 $k \geqslant N$ 有

$$|P(f_{n_k}(z)) - z| \geqslant M-1>0.$$

由于在 $\{z: \ |z| \leqslant r\}$ 内 $P(f_{n_k}(z)) - z \neq 0$, 于是由最小模定理得知, 当 $|z| \leqslant r$ 时, 对于任意的正整数 $k \geqslant N$ 有

$$|P(f_{n_k}(z)) - z| \geqslant M-1.$$

因此 $\{f_{n_k}(z)\}$ 在 $z=0$ 处正规. 所以 $\{f_{n_k}(z)\}$ 存在内闭一致收敛的子列, 即 $\{f_n(z)\}$ 存在内闭一致收敛的子列.

综上即得 $\mathcal{F}$ 在 $z_0=0$ 处正规, 于是 $\mathcal{F}$ 在 $D$ 内正规. □

2003 年, Hinchliffe[100] 证明了

**定理 6.2.2** 设 $\mathcal{G}$ 为区域 $D$ 内的一族全纯函数, $\overline{\mathbb{C}}=\mathbb{C}\cup\{\infty\}$ 为扩充复平面, $\alpha,\beta$ 为扩充复平面上的两个判别的复数, $f$ 为复平面上的超越亚纯函数满足 $\overline{\mathbb{C}}\setminus f(\mathbb{C})=\Phi,\{\infty\}$, 或 $\{\alpha,\beta\}$. 若对于任意 $g\in\mathcal{F}$, $f\circ g$ 在 $D$ 内没有不动点, 则 $\mathcal{G}$ 在 $D$ 内正规.

为了证明定理 6.2.2, 我们先证明如下引理.

**引理 6.2.1** 设 $\mathcal{G}$ 为区域 $\Delta(\alpha,r)$ 内的一族解析函数. 假设 $\mathcal{G}$ 在 $\alpha$ 处不正规, 但在 $\Delta'(\alpha,r)$ 内正规, 则存在 $\{g_n\}\subset\mathcal{G}$, 点列 $\{z_n\}\subset\Delta(\alpha,r)$, 使得 $z_n\to\alpha$, $g_n(z_n)=0$, 在 $\Delta'(\alpha,r)$ 内 $\{g_n(z)\}$ 内闭一致趋于 $\infty$.

**证明** 由于 $\mathcal{G}$ 在 $\alpha$ 处不正规, 故存在函数列 $\{g_n\}\subset\mathcal{G}$, $\{g_n\}$ 在 $\Delta(\alpha,r)$ 内没有内闭一致收敛的子列. 而 $\mathcal{G}$ 在 $\Delta'(\alpha,r)$ 内正规, 故存在 $\{g_n\}$ 的子列仍记为 $\{g_n\}$, 在 $\Delta'(\alpha,r)$ 内内闭一致收敛于解析函数 $g(z)$ 或内闭一致趋于 $\infty$.

若 $\{g_n\}$ 在 $\Delta'(\alpha,r)$ 上内闭一致收敛于解析函数 $g(z)$, 则在 $S(\alpha,r/2)=\{z:|z-\alpha|=r/2\}$ 上, 存在 $M>0$, 使得当 $z\in S(\alpha,r/2)$ 时, 有 $|g(z)|\leqslant M$. 又 $\{g_n\}$ 在 $S(\alpha,r/2)$ 上一致收敛于解析函数 $g(z)$, 故对于充分大的 $n$ 和 $z\in S(\alpha,r/2)$, 有 $|g_n(z)|\leqslant 2M$. 由最大模原理知, 对于 $z\in\Delta(\alpha,r/2)=\{z:|z-\alpha|\leqslant r/2\}$, 有 $|g_n(z)|\leqslant 2M$. 而内闭一致有界的函数族必正规, 这与 $\{g_n\}$ 在 $\Delta(\alpha,r)$ 内没有内闭一致收敛的子列矛盾, 所以 $\{g_n\}$ 在 $\Delta'(\alpha,r)$ 内内闭一致趋于 $\infty$.

若 $\{g_n\}$ 中仅有有限个函数 $g_n$ 在 $\Delta(\alpha,r)$ 上有零点, 则存在 $\{g_n\}$ 的子列 (仍记为 $\{g_n\}$), 使得 $\{g_n\}$ 在 $\Delta(\alpha,r)$ 上没有零点. 于是对于 $\{\frac{1}{g_n}\}$ 应用最大模原理知, 在 $\Delta(\alpha,r/2)$ 内 $\{g_n\}$ 内闭一致趋于无穷, 这与 $\{g_n\}$ 在 $\Delta(\alpha,r)$ 内没有内闭一致收敛的子列矛盾. 故存在 $\{g_n\}$ 的子列 (仍记为 $\{g_n\}$) 及 $z_n\in\Delta(\alpha,r)$, 使得 $g_n(z_n)=0$. 不妨设 $\{z_n\}$ 收敛, $z_n$ 为 $g_n(z)$ 的离 $\alpha$ 最近的零点, 则 $z_n\to\alpha$. 否则存在 $r_1>0$, 有无穷多个 $n$, 使得 $|z_n-\alpha|\geqslant 2r_1$, 则在 $\Delta(\alpha,r_1)$ 上对 $\{\frac{1}{g_n}\}$ 应用最大模原理知, 在 $\Delta(\alpha,r_1)$ 上 $\{g_n\}$ 内闭一致趋于无穷, 这与 $\{g_n\}$ 在 $\Delta(\alpha,r)$ 内没有内闭一致收敛的子列矛盾. 所以 $z_n\to\alpha$. 引理 6.2.1 得证. □

**引理 6.2.2**[107, 181] 设 $\alpha$ 是解析函数 $f(z)$ 的本性奇点, 则 $f(z)$ 的任意 Picard 例外值一定是 $f$ 在 $\alpha$ 处的渐近值.

引理 6.2.2 被称为 Iversen 定理. 证明参见文献 [107], [181].

**定理 6.2.2 的证明** 任取 $\alpha\in D$. 以下我们证明 $\mathcal{G}$ 在 $\alpha$ 处正规. 分三种情形讨论.

**情形 1** 至少存在两个判别的有穷复数 $\beta_1, \beta_2$ , 使得 $f(\beta_1) = f(\beta_2) = \alpha$.

事实上, 假设 $\mathcal{G}$ 在 $\alpha$ 处不正规, 则由引理 3.1.3 知, 存在点列 $z_n \to \alpha$, 函数列 $g_n(z) \in \mathcal{G}$, 正实数列 $\rho_n \to 0^+$, 使得 $g_n(z_n + \rho_n z)$ 在复平面 $\mathbb{C}$ 上内闭一致收敛到一个非常数整函数 $g(z)$. 由 Picard 定理知, $g(z)$ 至少取 $\beta_1, \beta_2$ 中的一个值, 不妨设 $g(\gamma) = \beta_1$.

令 $F_n(z) = f(g_n(z_n + \rho_n z)) - (z_n + \rho_n z)$, 则 $F_n(z)$ 在除去 $f(g(z))$ 的极点后的区域内内闭一致收敛到非常数亚纯函数 $F(z) = f(g(z)) - \alpha$. 由于 $F(\gamma) = f(\beta_1) - \alpha = 0$, $F(z) \not\equiv 0$, 于是由 Hurwitz 定理知, 存在 $\gamma_n \to \gamma$ 使得 $F_n(\gamma_n) = 0$, 即 $0 = F_n(\gamma_n) = f(g_n(z_n + \rho_n \gamma_n)) - (z_n + \rho_n \gamma_n)$, 这与 $f(g(z)) \neq z$ 矛盾. 所以 $\mathcal{G}$ 在 $\alpha$ 处正规.

**情形 2** 只存在一个有穷复数 $\beta$, 使得 $f(\beta) = \alpha$, 即 $f^{-1}(\alpha) = \{\beta\}$.

假如 $\mathcal{G}$ 在 $\alpha$ 处不正规. 由情形 1 和 Picard 定理知, 存在 $r > 0$ 使得 $\mathcal{G}$ 在 $\Delta'(\alpha, r)$ 内正规. 由引理 6.2.1 知, 存在 $\{g_n\} \subset \mathcal{G}$, 点列 $\{z_n\} \in \Delta(\alpha, r)$, 使得 $g_n(z_n) = 0$, $z_n \to \alpha$, 而在 $\Delta'(\alpha, r)$ 内 $\{g_n(z)\}$ 内闭一致趋于 $\infty$.

选取 $\rho, v > 0$, 使得在 $|z - \beta| = \rho$ 上, 有 $|f(z) - \alpha| > v$. 选取 $\delta$ 满足 $0 < \delta < \min\{r, v\}$. 由于在 $\Delta'(\alpha, r)$ 上 $\{g_n\}$ 内闭一致趋于 $\infty$, 故当 $n$ 充分大时, 对于任意 $\omega \in \Delta(\beta, \rho)$ 在 $|z - \alpha| = \delta$ 上有 $|\omega| < |g_n(z)|$. 由于当 $n$ 充分大时, 有 $|z_n - \alpha| < \delta$, 于是由儒歇定理知, $g_n$ 在 $\Delta(\alpha, \delta)$ 取到值 $\omega$. 因此有 $g_n(\Delta(\alpha, \delta)) \supset \Delta(\beta, \rho)$. 由于当 $n$ 充分大时, $g_n(\partial\Delta(\alpha, \delta)) \cap \Delta(\beta, \rho) = \emptyset$, 所以存在 $g_n^{-1}(\Delta((\beta, \rho))$ 的一个分支 $U \subset \Delta(\alpha, \delta)$ 且 $U$ 为一个约当区域, 使得 $g_n(U) = \Delta(\beta, \rho)$.

当 $z \in \partial U$ 时, $g_n(z) \in \partial\Delta(\beta, \rho)$ 且 $|f(g_n(z)) - \alpha| > v$. 故当 $z \in \partial U$ 时有

$$|z - \alpha| \leqslant \delta < v < |f(g_n(z)) - \alpha|.$$

又存在 $\gamma_n \in U$, 使得 $g_n(\gamma_n) = \beta$. 故 $f(g_n(\gamma_n)) = f(\beta) = \alpha$. 于是由儒歇定理知, $f(g_n(z)) - z$ 在 $U$ 内有零点, 即 $f(g_n(z))$ 有不动点, 矛盾. 所以 $\mathcal{G}$ 在 $\alpha$ 处正规.

**情形 3** $f \neq \alpha$, 且 $f \neq \beta$.

假设 $\mathcal{G}$ 在 $\alpha$ 处不正规. 若 $\beta = \infty$, 则对任意 $g_n \in \mathcal{G}$, 函数 $\dfrac{f(g_n(z)) - \alpha}{z - \alpha}$ 在 $D \setminus \{\alpha\}$ 内解析, 且不取 0 和 1, 由 Montel 定理知, $\mathcal{H} = \{\dfrac{f(g_n(z)) - \alpha}{z - \alpha} : g_n \in \mathcal{G}\}$ 在 $D \setminus \{\alpha\}$ 内正规.

若 $\beta \neq \infty$, 则对任意 $g_n \in \mathcal{G}$, 函数 $\dfrac{f(g_n(z)) - \alpha}{f(g_n(z)) - \beta} \dfrac{z - \beta}{z - \alpha}$ 在 $D \setminus \{\alpha, \beta\}$ 内解析, 且不取 0 和 1, 由 Montel 定理知, $\mathcal{H} = \left\{ \dfrac{f(g_n(z)) - \alpha}{f(g_n(z)) - \beta} \dfrac{z - \beta}{z - \alpha} : \ g_n \in \mathcal{G} \right\}$ 在 $D \setminus \{\alpha, \beta\}$ 内正规.

对上述两种情形, 取 $\{g_n\} \subset \mathcal{G}$, 使得 $\{g_n\}$ 在 $\alpha$ 的任意邻域内没有收敛子列. 由引理 6.2.1 知, 存在 $\{g_n\}$ 及点列 $z_n, z_n \to \alpha$, 使得 $g_n(z_n) = 0$, 而在 $\alpha$ 的去心邻

域 $G$ 内 $g_n(z) \to \infty$. 则存在 $r$, 使得 $\overline{\Delta}(\alpha, r) \subset G \cup \{\alpha\}$. 令 $M_n = \min\{|g_n(z)| : |z-\alpha| = r\}$, 则当 $n \to \infty$ 时, $M_n \to \infty$. 由于当 $n$ 充分大时, $z_n \in \Delta(\alpha, r)$. 故有 $\Delta(0, M_n) \subset g_n(\overline{\Delta}(\alpha, r))$. 令 $S(\alpha, r) = \{z : |z-\alpha| = r\}$, 并记 $g_n(S(\alpha, r))$ 为 $\Gamma_n$, 则 $\Gamma_n$ 为包围原点, 离原点的距离任意大的闭曲线. 由于 $\mathcal{H}$ 在 $G$ 上正规, 即任取函数列 $\{h_n\} \subset \mathcal{H}$, 都存在子列 (仍记为 $\{h_n\}$), 在 $G$ 上内闭一致收敛于 $\psi$, 则 $\psi$ 为解析函数或 $\psi \equiv \infty$.

若在 $G$ 上 $\psi \equiv \infty$, 则在 $S(\alpha, r)$ 上 $h_n(z) \to \infty$. 所以存在 $M > 0$, 使得对于充分大的 $n$ 及 $z \in S(\alpha, r)$ 有 $|h_n(z)| \geqslant M$. 若 $\beta = \infty$, 则 $|h_n(z)| = \left|\dfrac{f(g_n(z)) - \alpha}{z - \alpha}\right| \geqslant M$, 故在 $S(\alpha, r)$ 上 $|f(g_n(z)) - \alpha| \geqslant Mr$. 若 $\beta \neq \infty$, 则 $|h_n(z)| = \left|\dfrac{f(g_n(z)) - \alpha}{f(g_n(z)) - \beta} \dfrac{z - \beta}{z - \alpha}\right| \geqslant M$, 故 $\left|\dfrac{f(g_n(z)) - \beta}{f(g_n(z)) - \alpha}\right| \leqslant \dfrac{c}{M}$, 其中 $c = \max\{|\dfrac{z-\beta}{z-\alpha}| : z \in S(\alpha, r)\}$. 所以 $|f(g_n(z)) - \alpha| \geqslant \dfrac{|\alpha - \beta|}{1 + \dfrac{c}{M}}$, 这与引理 6.2.2 矛盾.

若在 $G$ 上 $\psi$ 为解析函数, 则存在 $L > 0$, 使得在 $S(\alpha, r)$ 上有 $|\psi(z)| \leqslant L$. 故对于充分大的 $n$ 和 $z \in S(\alpha, r)$, 有 $|h_n(z)| \leqslant 2L$. 若 $\beta = \infty$, 则 $|h_n(z)| = \left|\dfrac{f(g_n(z)) - \alpha}{z - \alpha}\right| \leqslant 2L$, 所以 $|f(g_n(z)) - \alpha| \leqslant 2Lr$; 若 $\beta \neq \infty$, 则 $|h_n(z)| = \left|\dfrac{f(g_n(z)) - \alpha}{f(g_n(z)) - \beta} \cdot \dfrac{z - \beta}{z - \alpha}\right| \leqslant 2L$, 所以 $|f(g_n(z)) - \beta| \geqslant \dfrac{c|\alpha - \beta|}{2L}$, 其中 $c = \min\left\{|\dfrac{z-\beta}{z-\alpha}| : z \in S(\alpha, r)\right\}$. 这也与引理 6.2.2 矛盾.

综上讨论即知 $\mathcal{G}$ 在 $\alpha$ 处正规.

在文献 [100] 中 Hinchliffe 提出问题: 当 $\overline{\mathbb{C}} \setminus f(C) = \{\alpha\}$ 时, $\mathcal{F}$ 在 $\alpha \in D$ 处是否正规?

Bergweiler[23] 回答了这个问题, 他证明了

**定理 6.2.3** *设 $D$ 为复平面上的一个包含原点的区域, 则存在区域 $D$ 内的一族解析函数 $\mathcal{G}$ 以及复平面上的亚纯函数 $f$, 使得对于任意 $g \in \mathcal{G}$, $f \circ g$ 在 $D$ 内没有不动点, 但 $\mathcal{G}$ 在 $D$ 内不正规.*

为了证明定理 6.2.3, 先证明以下的引理

**引理 6.2.3** *存在超越整函数 $h(z)$, 正实数序列 $\{a_k\}$ 和 $\{b_k\}$, 使得 $a_k \to \infty$, $b_k \to \infty$, $\dfrac{b_k}{a_k} \to \infty$, 并且在 $|z| < a_k + b_k$ 内有 $h(z) \neq \dfrac{b_k}{z - a_k}$.*

**证明** 要证明引理 6.2.3, 只需证明存在正数列 $\{a_k\}, \{b_k\}$ 以及解析函数列 $\{h_n(z)\}$ 满足下列条件:

(i) $a_m > a_{m-1} + 1, b_m > b_{m-1} + 1, b_m > (a_m)^2, m \geqslant 2$;

(ii) 在 $|z| \leqslant a_k + b_k$ 内 $h_m(z) \neq \dfrac{b_k}{z-a_k}, (1 \leqslant k \leqslant m)$;

(iii) 在 $|z| < a_{m-1} + b_{m-1}$ 内, $|h_m(z) - h_{m-1}(z)| \leqslant 2^{-m}, m \geqslant 2$.

事实上由 (i) 知, 存在正实数序列 $\{a_k\}, \{b_k\}$, 使得 $a_k \to \infty$, $b_k \to \infty$, $\dfrac{b_k}{a_k} \to \infty$. 由 (iii) 知, $\{h_n(z)\}$ 在复平面上内闭一致收敛于一个整函数 $h(z)$. 由 (ii) 和 Hurwitz 定理知, 在 $|z| \leqslant a_k + b_k$ 内 $h(z) \neq \dfrac{b_k}{z-a_k}$.

为了构造 $\{a_k\}, \{b_k\}, \{h_n(z)\}$, 令 $a_1 = b_1 = 1$, $h_1(z) = \dfrac{1-e^{z-1}}{z-1}$, 则当 $m=1$ 时, (ii) 成立. 以下设 $n \geqslant 2$. 假设当 $m \leqslant n-1$ 时, (i)(ii)(iii) 式成立, 故当 $1 \leqslant k \leqslant n-1$ 时, 在 $|z| \leqslant a_k + b_k$ 内 $h_{n-1}(z) \neq \dfrac{b_k}{z-a_k}$.

以下证明 $m = n$ 时, (i)(ii)(iii) 成立.

令

$$\delta_k = \min_{|z| \leqslant r_k} |h_{n-1}(z) - \frac{b_k}{z-a_k}| > 0, \ \delta = \min\{\delta_1, \delta_2, \cdots, \delta_{n-1}, 2^{-n}\}.$$

又令 $a_n = a_{n-1} + 2$,

$b_n = \max\{b_{n-1} + 2, \ (a_n)^2, \ 2 \max\limits_{|z|=r_{n-1}} |(z-a_n)h_{n-1}(z)| + 1\}$, 则 (i) 成立.

令 $v(z) = \log\left(1 - \dfrac{(z-a_n)h_{n-1}(z)}{b_n}\right)$, 则 $v(z)$ 在 $|z| \leqslant r_{n-1}$ 内全纯, 且

$$h_{n-1}(z) = \frac{b_n}{z-a_n}(1 - \mathrm{e}^{v(z)}), \tag{6.2.1}$$

则存在多项式序列 $\{v_d(z)\}$, 满足 $v_d(a_n) = v_d'(a_n) = 0$, 使得 $v_d(z)$ 在 $|z| \leqslant r_{n-1}$ 上内闭一致收敛于 $v(z)$.

例如 $v_d(z) = T_d(z) - T_d(a_n)\left(\dfrac{z}{a_n}\right)^{l_d} - \left(T_d'(a_n) - T_d(a_n)\dfrac{l_d}{a_n}\right)(z-a_n)\left(\dfrac{z}{a_n}\right)^{m_d}$ 其中 $T_d(z)$ 为 $v(z)$ 的 $d$ 次泰勒展式, $l_d, m_d$ 为正整数. 取 $l_d, m_d$ 适当大使得在 $|z| \leqslant r_{n-1}$ 上有

$$|\frac{b_n}{z-a_n}(\mathrm{e}^{v(z)} - \mathrm{e}^{v_d(z)})| < \delta, \tag{6.2.2}$$

于是

$$h_n(z) = \frac{b_n}{z-a_n}(1 - \mathrm{e}^{v_d(z)}) \tag{6.2.3}$$

为整函数且 $h_n(a_n) = 0$.

由 (6.2.1)~(6.2.3) 知在 $|z| \leqslant r_{n-1}$ 内

$$|h_n(z) - h_{n-1}(z)| < \delta, \tag{6.2.4}$$

于是即知 (iii) 成立.

由 (6.2.3) 式知, 在 $|z| \leqslant r_n$ 内

$$h_n(z) \neq \frac{b_n}{z-a_n},$$

又由于

$$\begin{aligned}\left|h_n(z)-\frac{b_k}{z-a_k}\right| &= |h_n(z)-h_{n-1}(z)+h_{n-1}-\frac{b_k}{z-a_k}| \\ &\geqslant |h_{n-1}(z)-\frac{b_k}{z-a_k}|-|h_n(z)-h_{n-1}(z)| \\ &> \delta_k-\delta \geqslant 0,\end{aligned}$$

故由上两式知, 在 $|z| \leqslant r_k$ 内, 对于 $1 \leqslant k \leqslant n$ 有 $h_n(z) \neq \dfrac{b_k}{z-a_k}$. 故 (ii) 成立.

由于

$$\begin{aligned}|h(0)| &= \lim_{m\to\infty}|h_m(0)| \geqslant |h_1(0)|-\sum_{m=2}^{\infty}|h_m(0)-h_{m-1}(0)| \\ &\geqslant 1-\frac{1}{\mathrm{e}}-\sum_{m=2}^{\infty}\frac{1}{2^m}=\frac{1}{2}-\frac{1}{\mathrm{e}}, \\ |h(a_n)| &= \lim_{m\to\infty}|h_m(a_n)| \leqslant |h_n(a_n)|+\sum_{m=n+1}^{\infty}|h_m(a_n)-h_{m-1}(a_n)| \\ &\leqslant \sum_{m=n+1}^{\infty}\frac{1}{2^m}=\frac{1}{2^n},\end{aligned}$$

故 $h(z)$ 为超越整函数.

**定理 6.2.3 的证明**　超越整函数 $h(z)$, 正实数序列 $\{a_k\}$ 和 $\{b_k\}$ 如同引理 6.8. 令 $D=\{z:\ |z|<1\}$, $\mathcal{G}=\{g_k(z)\}$, $g_k(z)=a_k+b_kz$, 则当 $|g_k(z)|<a_k+b_k$ 时, $h(g_k(z)) \neq \dfrac{b_k}{g_k(z)-a_k}=\dfrac{1}{z}$. 又令 $f(z)=\dfrac{1}{h(z)}$, 则当 $z\in D$ 时, 有 $f(g_k(z))\neq z$. 由于 $g_k(0)=a_k\to\infty$, $g_k(\dfrac{-a_k}{b_k})=0$, 而 $\dfrac{-a_k}{b_k}\to 0$, 故 $\mathcal{G}$ 在 $z=0$ 处不正规, 于是 $\mathcal{G}$ 在 $D$ 内不正规.

最近, 常建明、方明亮和 L. Zalcman[43] 考虑亚纯函数族的情形, 他们得到了

**定理 6.2.4**　*设 $\mathcal{F}$ 是区域 $D$ 内的一族亚纯函数, $R$ 是一个有理函数满足 $\deg R \geqslant 3$. 若对于 $\mathcal{F}$ 中的任意函数 $f$, $R(f(z))$ 在 $D$ 内没有不动点, 则 $\mathcal{F}$ 在 $D$ 内正规.*

**注**　如果 $\mathcal{F}$ 是区域 $D$ 内的一族全纯函数, 则在定理 6.2.4 中, 只需要 $\deg(R)\geqslant 2$. 这个结果首先是 Bergweiler [23] 获得的. 下面的例子说明在定理 6.2.4 中条件 $\deg R\geqslant 3$ 是最好的.

**例 6.2** 设

$$f(z)=\frac{\cos\sqrt{z}}{(\sin\sqrt{z})/\sqrt{z}}=\frac{\sum_{j=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^j}{(2j)!}z^j}{\sum_{j=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^j}{(2j+1)!}z^j},$$

$$\mathcal{F}=\{f_n\},$$

其中

$$f_n(z)=\frac{\mathrm{i}}{\sqrt{n}}f(nz),\qquad n=1,2,3,\cdots.$$

再设 $D=\{z:|z|<1\}$, $R(z)=z^2$, 则有

$$R(f_n(z))=-\frac{1}{n}\frac{1-(\sin\sqrt{nz})^2}{[(\sin\sqrt{nz})/\sqrt{nz}]^2}=-\frac{1}{n[(\sin\sqrt{nz})/\sqrt{nz}]^2}+z\neq z.$$

另一方面,

$$f_n(0)=\frac{\mathrm{i}}{\sqrt{n}}f(0)=\frac{\mathrm{i}}{\sqrt{n}},\quad f_n'(0)=\mathrm{i}\sqrt{n}f'(0)=-\frac{1}{3}\mathrm{i}\sqrt{n},$$

于是

$$f_n^{\#}(0)=\frac{|f_n'(0)|}{1+|f_n(0)|^2}=\frac{\dfrac{1}{3}\sqrt{n}}{1+\dfrac{1}{n}}\to\infty,(n\to\infty),$$

从而由 Marty 定则, $\mathcal{F}$ 在 $z=0$ 处不正规. □

**例 6.3** 设 $D=\{z:|z-1|<1\}$,

$$f(z)=\frac{(\sin\sqrt{z})/\sqrt{z}}{\cos\sqrt{z}}=\frac{\sum_{j=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^j}{(2j+1)!}z^j}{\sum_{j=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^j}{(2j)!}z^j},$$

$$\psi(z)=\sqrt{1+z}=\sqrt{2}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{\Pi_{s=0}^{j-1}(\frac{1}{2}-s)}{j!}\left(\frac{z-1}{2}\right)^j,\quad z\in D.$$

再设 $\mathcal{F}=\{f_n\}$, 其中

$$f_n(z)=\mathrm{i}\sqrt{n}\psi(z)f(n(z-1)),\qquad n=1,2,3,\cdots,$$

$R(z)=(z^2+1)/(z^2-1)$. 则有

$$R(f_n(z))=z-\frac{z+1}{1+2n\left(\dfrac{\sin\sqrt{n(z-1)}}{\sqrt{n(z-1)}}\right)^2}\neq z.$$

另一方面,

$$f_n(1)=\mathrm{i}\sqrt{2n}f(0)=\mathrm{i}\sqrt{2n},$$

$$f_n'(1)=\mathrm{i}\sqrt{n}(\psi'(1)f(0)+n\psi(1)f'(0))=\mathrm{i}\sqrt{n}\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{2}}{6}n\right).$$

于是

$$f_n^{\#}(1)=\frac{|f_n'(1)|}{1+|f_n(1)|^2}=\frac{\sqrt{n}\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{2}}{6}n\right)}{1+2n}\to\infty,(n\to\infty).$$

从而由 Marty 定则, $\mathcal{F}$ 在 $z=1$ 处不正规. □

在例 6.2 中, $\mathcal{F}$ 在 $z_0$ 处不正规并且 $R(z)=z_0$ 有有穷解, 在例 6.3 中, $\mathcal{F}$ 在 $z_0$ 处不正规并且 $R(z)=z_0$ 没有有穷解.

**定理 6.2.4 的证明**　设 $z_0\in D$ 为任一点. 我们证明 $\mathcal{F}$ 在 $z_0$ 处正规. 分两种情形讨论.

**情形 1**　$R(z)-z_0$ 有三个不同的有穷零点 $a,b,c$. 假设 $\mathcal{F}$ 在 $z_0$ 处不正规, 那么由引理 3.1.3, 存在点列 $z_n\to z_0$, 正数列 $\rho_n\to 0^+$ 和函数列 $f_n\in\mathcal{F}$, 使得

$$g_n(\zeta)=f_n(z_n+\rho_n\zeta)\to g(\zeta),\tag{6.2.5}$$

这里是按球距在 $\mathbb{C}$ 上内闭一致收敛的, $g$ 是 $\mathbb{C}$ 上的非常数亚纯函数.

于是

$$R(g_n(\zeta))-(z_n+\rho_n\zeta)\to R(g(\zeta))-z_0,\tag{6.2.6}$$

这里在 $\mathbb{C}\setminus\{z\in\mathbb{C}:\ g(z)=\infty\}$ 上收敛是局部一致的.

由于 $R(g_n(\zeta))-(z_n+\rho_n\zeta)=R(f_n(z_n+\rho_n\zeta))-(z_n+\rho_n\zeta)\neq 0$, 由 Hurwitz 定理知, 或者 $R(g(\zeta))-z_0\equiv 0$, 或者 $R(g(\zeta))-z_0\neq 0$. 若是 $R(g(\zeta))-z_0\equiv 0$, 则 $g$ 是常数; 若是 $R(g(\zeta))-z_0\neq 0$, 则 $g(\zeta)\neq a,b,c$, 从而由 Picard 定理知, $g$ 也为常数. 因此两者都与 $g$ 是非常数函数矛盾. 从而在情形 1 中, $\mathcal{F}$ 在 $z_0$ 处正规.

**情形 2**　$R(z)-z_0$ 至多有两个不同的有穷零点. 我们断言: 存在正数 $\delta_0$, 使得 $\mathcal{F}$ 在 $\Delta'(z_0,\delta_0)=\{z:\ 0<|z-z_0|<\delta_0\}$ 内正规. 事实上, 由情形 1 的讨论, 我们只要证明存在正数 $\delta_0$, 使得对任何 $z_1\in\Delta'(z_0,\delta_0)$, $R(z)-z_1$ 至少有三个不同的有穷零点.

记 $\overline{\mathbb{C}}=\mathbb{C}\cup\{\infty\}$, $S=\{z\in\overline{\mathbb{C}}:\ R'(z)=0\}$, $E=R(S)=\{R(z):\ z\in S\}$. 则 $E$ 是有限集. 于是存在正数 $\delta_0$, 使得

$$\Delta'(z_0,\delta_0)\cap E=\Phi\ (\text{空集}).\tag{6.2.7}$$

从而对任何 $z_1 \in \Delta'(z_0, \delta_0)$, $R(z) - z_1$ 没有重零点, 由此可知, $R(z) - z_1$ 至少有 $3(\leqslant \deg R)$ 个不同的有穷零点. 断言得证.

现在我们分三种子情形来讨论.

**情形 2.1** $R(z) - z_0$ 有一个重零点 $z = a$. 则存在正数 $\delta_1 \leqslant \delta_0$, 使得

$$R(\{z: |z-a| < \delta_1\}) \subset \{z: |z-z_0| < \delta_0\}, \tag{6.2.8}$$

$$R(z) = z_0 + \tau\psi^k(z), \tag{6.2.9}$$

其中 $k \geqslant 2$ 为整数, $\tau \neq 0$ 为常数, $\psi(z)$ 是区域 $\Delta(a, \delta_1) = \{z: |z-a| < \delta_1\}$ 内的单叶解析函数, 而且有 $\psi(a) = 0$, $\psi'(a) = 1$.

令

$$\mathcal{G} = \{g = f(R): f \in \mathcal{F}\}. \tag{6.2.10}$$

则有

(i) $\mathcal{G}$ 在 $\Delta'(a, \delta_1) = \{z: 0 < |z-a| < \delta_1\}$ 内正规;

(ii) 对任何 $z \in \Delta(a, \delta_1)$, $g \in \mathcal{G}$,

$$R(g(z)) \neq R(z); \tag{6.2.11}$$

(iii) $\mathcal{G}$ 在 $a$ 处正规当且仅当 $\mathcal{F}$ 在 $z_0$ 处正规;

由 (6.2.9) 和 (6.2.11), 我们知道对任何 $z \in \Delta(a, \delta_1)$ 有

$$[\psi(g(z))]^k \neq [\psi(z)]^k.$$

于是

$$\psi(g(z)) \neq \omega_j\psi(z), \ j = 0, 1, 2, \cdots, k-1,$$

这里 $\omega_j = \mathrm{e}^{\frac{2\pi j}{k}\mathrm{i}}$, $(j = 0, 1, 2, \cdots, k-1)$.

从而我们有

$$g(z) \neq \psi^{-1}(\omega_j\psi(z)), \ (j = 0, 1, 2, \cdots, k-1).$$

特别地有

$$g(z) \neq z, \quad g(z) \neq \psi^{-1}(\omega_1\psi(z)).$$

再令 $\mathcal{H} = \{h = g - id: g \in \mathcal{G}\}$, 这里 $id$ 表示恒等映射. 则有

(iv) $\mathcal{H}$ 在 $\Delta'(a, \delta_1)$ 内正规;

(v) 对任何 $z\in\Delta(a,\delta_1)$ 和 $h\in\mathcal{H}$,

$$h(z)\neq 0,\ h(z)\neq\psi^{-1}(\omega_1\psi(z))-z(\not\equiv 0);$$

(vi) $\mathcal{H}$ 在 $a$ 处正规当且仅当 $\mathcal{G}$ 在 $a$ 处正规.

下面我们证明 $\mathcal{H}$ 在 $a$ 处正规.

设 $\{h_j\}$ 是 $\mathcal{H}$ 中的一列函数, 那么存在 $\{h_j\}$ 的子列 (不妨仍设为 $\{h_j\}$), 它在 $\Delta'(a,\delta_1)$ 上按球距内闭一致收敛到函数 $h$, $h$ 可恒为 $\infty$. 下面再分两种情形.

**情形 2.1.1** $h\not\equiv 0$. 则由 Hurwitz 定理知, 在 $\Delta(a,\delta_1)$ 内有 $h\neq 0$. 于是,

$$\min_{0\leqslant\theta\leqslant 2\pi}\left|h\left(a+\frac{\delta_1}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right)\right|>A>0,$$

这里 $A$ 为正常数.

从而对充分大的 $j$ 有

$$\min_{0\leqslant\theta\leqslant 2\pi}\left|h_j\left(a+\frac{\delta_1}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right)\right|>\frac{A}{2}>0.$$

由于在 $\Delta(a,\delta_1)$ 内, $h_j$ 亚纯并且 $h_j\neq 0$, 在 $\Delta(a,\delta_1)$ 内 $1/h_j$ 全纯. 从而 $1/h_j$ 在 $\overline{\Delta}(a,\delta_1/2)=\{z:\ |z-a|\leqslant\delta_1/2\}$ 上全纯, 并且

$$\max_{0\leqslant\theta\leqslant 2\pi}\frac{1}{|h_j(a+\frac{\delta_1}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})|}<\frac{2}{A}.$$

由最大模原理, 我们得到

$$\max_{|z-a|\leqslant\frac{\delta_1}{2}}\frac{1}{|h_j(z)|}<\frac{2}{A},$$

因此

$$\min_{|z-a|\leqslant\frac{\delta_1}{2}}|h_j(z)|>\frac{A}{2}>0,$$

于是存在 $\{h_j\}$ 的子列在 $\Delta(a,\delta_1/2)$ 内按球距内闭一致收敛.

**情形 2.1.2** $h\equiv 0$. 则 $\{h_j\}$ 在 $\Delta'(a,\delta_1)$ 内内闭一致收敛到 0. 从而 $\{\psi_j\}$ 和 $\{\psi_j'\}$ 也在 $\Delta'(a,\delta_1)$ 内内闭一致收敛到 0, 这里

$$\psi_j(z)=\frac{h_j(z)}{\psi^{-1}(\omega_1\psi(z))-z}\neq 1. \tag{6.2.12}$$

于是, 对充分大的 $j$, 由辐角原理, 我们有

$$\begin{aligned}&\left|N\left(\frac{\delta_1}{2},a,\psi_j-1\right)-N\left(\frac{\delta_1}{2},a,\frac{1}{\psi_j-1}\right)\right|\\ =&\left|\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{|z-a|=\frac{\delta_1}{2}}\frac{\psi_j'(z)}{\psi_j(z)-1}\mathrm{d}z\right|<1,\end{aligned}$$

从而

$$N\left(\frac{\delta_1}{2}, a, \psi_j - 1\right) = N\left(\frac{\delta_1}{2}, a, \frac{1}{\psi_j - 1}\right).$$

由此及 (6.2.12), 对充分大的 $j$ 有

$$N\left(\frac{\delta_1}{2}, a, \psi_j\right) = N\left(\frac{\delta_1}{2}, a, \psi_j - 1\right) = N\left(\frac{\delta_1}{2}, a, \frac{1}{\psi_j - 1}\right) = 0.$$

即对充分大的 $j$, $\psi_j$ 在 $\Delta(a, \delta_1/2)$ 内没有极点, 从而 $h_j$ 在 $\Delta(a, \delta_1/2)$ 内也没有极点. 于是存在 $\{h_j\}$ 的子列, 在 $\Delta(a, \delta_1/2)$ 内按球距内闭一致收敛. 因此 $\mathcal{H}$ 在 $a$ 处正规. 由 (iii)~(vi), $\mathcal{F}$ 在 $z_0$ 处正规.

**情形 2.2** $R(z) - z_0$ 只有单级零点. 则或者

$$R(z) = z_0 + \frac{z - a}{P_1(z)}, \tag{6.2.13}$$

或者

$$R(z) = z_0 + \frac{(z - a)(z - b)}{P_1(z)}, \tag{6.2.14}$$

这里 $P_1(z)$ 是多项式, 满足 $\deg P_1 \geqslant 3$, $a, b$ 是不同的常数, 并且不是多项式 $P_1$ 的零点.

由于 $R(f(z)) \neq z$, $z \in \Delta(z_0, \delta_0)$, 我们有

$$f(z_0) \neq \infty. \tag{6.2.15}$$

与情形 2.1 类似, 我们知道存在正数 $\delta_2$, 使得

(vii) $R$ 在 $\Delta(a, \delta_2) = \{z: |z - a| < \delta_2\}$ 内单叶解析;

(viii) $\mathcal{G}$ 在 $\Delta'(a, \delta_2) = \{z: 0 < |z - a| < \delta_2\}$ 内正规;

(ix) $\mathcal{G}$ 在 $a$ 处正规当且仅当 $\mathcal{F}$ 在 $z_0$ 处正规;

(x) 对任何 $z \in \Delta(a, \delta_2)$, $g \in \mathcal{G}$, 有 $R(g(z)) \neq R(z)$, $g(a) = f(R(a)) = f(z_0) \neq \infty$.

下面我们考虑两种子情形.

**情形 2.2.1** $R(z)$ 具有形式 (6.2.13), 那么由 (x), 我们有

$$(z - a)P_1(g(z)) - (g(z) - a)P_1(z) \neq 0, \ z \in \Delta(a, \delta_2). \tag{6.2.16}$$

设 $P_1(z)=\sum\limits_{j=0}^{p}\lambda_j z^j$, 这里 $p\geqslant 3$ 和 $\lambda_p\neq 0$, 则有

$$\begin{aligned}
&(z-a)P_1(\omega)-(\omega-a)P_1(z)\\
=&(z-a)\sum_{j=0}^{p}\lambda_j\omega^j-(\omega-a)P_1(z)\\
=&(z-a)\sum_{j=0}^{p}\lambda_j((\omega-z)+z)^j-(z-a)P_1(z)-(\omega-z)P_1(z)\\
=&(z-a)\left[\sum_{j=0}^{p}\lambda_j\sum_{t=0}^{j}C_j^t z^{j-t}(\omega-z)^t-P_1(z)\right]-(\omega-z)P_1(z)\\
=&(\omega-z)\left[(z-a)\sum_{j=1}^{p}\lambda_j\sum_{t=1}^{j}C_j^t z^{j-t}(\omega-z)^{t-1}-P_1(z)\right]\\
=&(\omega-z)\left[\sum_{s=0}^{p-1}Q_s(z)(\omega-z)^s\right],
\end{aligned}\tag{6.2.17}$$

这里 $C_j^t=\dfrac{j!}{t!(j-t)!}$, $Q_s(z)$ $(s=0,1,2,\cdots,p-1)$ 是多项式. 特别地,

$$Q_0(z)=(z-a)P_1'(z)-P_1(z),\ Q_{p-1}(z)=\lambda_p(z-a),$$

而且 $Q_0(z)\neq 0$, $z\in\Delta(a,\delta_3)$, 这里 $\delta_3(\leqslant\delta_2)$ 是一正数.

由 (6.2.16) 和 (6.2.17), 我们有

$$g(z)\neq z,\ 和\ \sum_{s=0}^{p-1}Q_s(z)(g(z)-z)^s\neq 0.\tag{6.2.18}$$

置 $\mathcal{H}=\{h=g-id:\ g\in\mathcal{G}\}$. 则我们有

(xi) $\mathcal{H}$ 在 $\Delta'(a,\delta_3)$ 内正规;

(xii) $\mathcal{H}$ 在 $a$ 处正规当且仅当 $\mathcal{G}$ 在 $a$ 处正规;

(xiii) 对任何 $\Delta(a,\delta_3)$ 和 $h\in\mathcal{H}$, 有

$$h(z)\neq 0,\ \psi_h(z)=\frac{\sum_{s=1}^{p-1}Q_s(z)(h(z))^s}{Q_0(z)}\neq -1,\ h(a)=g(a)-a\neq\infty.\tag{6.2.19}$$

以下与情形 2.1 同样讨论可知 $\mathcal{H}$ 在 $a$ 处正规. 于是 $\mathcal{F}$ 在 $z_0$ 处正规.

**情形 2.2.2** $R(z)$ 具有形式 (6.2.14). 则

$$\frac{(\omega-a)(\omega-b)}{P_1(\omega)}-\frac{(z-a)(z-b)}{P_1(z)}=\frac{(\omega-a)(\omega-b)P_1(z)-(z-a)(z-b)P_1(\omega)}{P_1(\omega)P_1(z)}.$$

这里 $P_1(z)=\lambda z^k+c_1z^{k-1}+\cdots+c_k$, $k\geqslant 3$ 并且 $\lambda\neq 0$. 注意有

$$\begin{aligned}
&(z-a)(z-b)P_1(\omega)-(\omega-a)(\omega-b)P_1(z)\\
=&(z-a)(z-b)P_1(z+\omega-z)\\
&-[(\omega-z)+(z-a)][(\omega-z)+(z-b)]P_1(z)\\
=&(z-a)(z-b)\sum_{j=0}^{k}\frac{P_1^{(j)}(z)}{j!}(\omega-z)^j\\
&-[(\omega-z)^2+(2z-a-b)(\omega-z)+(z-a)(z-b)]P_1(z)\\
=&(z-a)(z-b)\sum_{j=1}^{k}\frac{P_1^{(j)}(z)}{j!}(\omega-z)^j\\
&-P_1(z)(\omega-z)^2-P_1(z)(2z-a-b)(\omega-z)\\
=&(\omega-z)\left\{(z-a)(z-b)P_1'(z)-(2z-a-b)P_1(z)\right.\\
&+\left[\frac{1}{2}(z-a)(z-b)P_1''(z)-P_1(z)\right](\omega-z)\\
&\left.+(z-a)(z-b)\sum_{j=3}^{k}\frac{P_1^{(j)}(z)}{j!}(\omega-z)^{j-1}\right\}\\
=&(\omega-z)\sum_{j=1}^{k}Q_j(z)(\omega-z)^{j-1},
\end{aligned}$$

这里 $Q_1,Q_2,\cdots,Q_k$ 是多项式. 特别地有 $Q_1(z)=(z-a)(z-b)P_1'(z)-(2z-a-b)P_1(z)$, $Q_k(z)=\lambda(z-a)(z-b)$, 且对充分小的正数 $\delta$, 当 $z\in\Delta(a,\delta)$ 时, 有 $Q_1(z)\neq 0$.

以下类似与情形 2.2.1 的讨论可知, $\mathcal{F}$ 在 $z_0$ 处正规.

**情形 2.3** $R(z)-z_0$ 没有零点. 则 $R$ 具有形式

$$R(z)=z_0+\frac{1}{P(z)},\tag{6.2.20}$$

这里 $P(z)$ 是多项式, 并且 $\deg P\geqslant 3$.

由于对任何 $f\in\mathcal{F}$ 和 $z\in\Delta(z_0,\delta_0)$, 有 $R(f(z))\neq z$, 我们得到 $f(z_0)\neq\infty$, $(z-z_0)P(f(z))-1\neq 0$. 于是 $\dfrac{1}{(z-z_0)P(f(z))-1}$ 在 $\Delta(z_0,\delta_0)$ 内解析.

令

$$g_f(z)=\frac{1}{(z-z_0)P(f(z))-1}. \tag{6.2.21}$$

则由 $f(z_0)\neq\infty$ 得

$$g_f(z_0)=-1. \tag{6.2.22}$$

由于 $\mathcal{F}$ 在 $\Delta'(z_0,\delta_0)$ 内正规, 我们知道对任何 $\{f_n\}\subset\mathcal{F}$, 存在 $\{f_n\}$ 的子列 (仍记为 $\{f_n\}$), 该子列在 $\Delta'(z_0,\delta_0)$ 内按球距内闭一致收敛到 $\infty$ 或亚纯函数 $\psi$.

如果在 $\Delta'(z_0,\delta_0)$ 内, $f_n\to\infty$, 则在 $\Delta'(z_0,\delta_0)$ 内, 同样有 $(z-z_0)P(f_n)\to\infty$. 于是由 (6.2.21); 在 $\Delta'(z_0,\delta_0)$ 内, $g_{f_n}(z)\to 0$. 由于 $g_{f_n}(z)$ 解析, 由最大模原理知, 在 $\Delta(z_0,\delta_0)$ 内, 有 $g_{f_n}(z)\to 0$. 特别地有 $g_{f_n}(z_0)\to 0$, 这与 $g_{f_n}(z_0)=-1$ 矛盾.

从而在 $\Delta'(z_0,\delta_0)$ 内, 有 $f_n\to\psi$. 显然, 在 $\Delta'(z_0,\delta_0)$ 内有

$$(z-z_0)P(f_n(z))\to(z-z_0)P(\psi(z)). \tag{6.2.23}$$

由此我们得到, 在 $\Delta'(z_0,\delta_0)$ 内有

$$g_{f_n}(z)\to\frac{1}{(z-z_0)P(\psi(z))-1}=G(z). \tag{6.2.24}$$

由于 $g_{f_n}(z)$ 解析, 我们知道在 $\Delta'(z_0,\delta_0)$ 内, 或者有 $G(z)\equiv\infty$, 或者有 $G(z)$ 解析.

如果 $G(z)\equiv\infty$, 则在 $\Delta'(z_0,\delta_0)$ 内, 有 $(z-z_0)P(\psi(z))-1\equiv 0$. 由此可知, $z_0$ 是 $P(\psi)$ 的极点. 进而 $z_0$ 是 $\psi$ 的极点, 这不可能.

于是 $G(z)$ 在 $\Delta'(z_0,\delta_0)$ 内解析. 于是由最大模原理, 在 $\Delta'(z_0,\delta_0)$ 内有

$$g_{f_n}(z)\to G(z), \tag{6.2.25}$$

从而 $G(z)$ 在 $\Delta'(z_0,\delta_0)$ 内解析. 进而 $\psi$ 在 $\Delta(z_0,\delta_0)$ 内亚纯.

由 (6.2.21) 和 (6.2.25), 我们知在 $\Delta(z_0,\delta_0)$ 内有

$$(z-z_0)P(f_n(z))\to(z-z_0)P(\psi(z)). \tag{6.2.26}$$

于是由 $f_n(z_0)\neq\infty$, 可得 $\psi(z_0)\neq\infty$. 否则, 由 (6.2.26) 得矛盾：$0=\infty$. 所以 $\psi(z)$ 在 $\Delta(z_0,\delta_4)$ 内解析. 由此结合 (6.2.26) 可知, 对于充分大的 $n$, $f_n$ 在 $\Delta(z_0,\delta_4)$ 内解析. 从而由最大模原理知, 在 $\Delta(z_0,\delta_4)$ 内有 $f_n\to\psi$. 于是 $\mathcal{F}$ 在 $z_0$ 处正规.

综上可知, $\mathcal{F}$ 在 $z_0$ 处正规, 从而 $\mathcal{F}$ 在 $D$ 内正规. 定理 6.2.4 得证. □

## 6.3 涉及对数导数的亚纯函数正规定则

1959 年, W. K. Hayman[95] 猜测: 设 $k(\geqslant 2)$ 是一个正整数, $f$ 是复平面上满足 $f \neq 0$, $f^{(k)} \neq 0$ 的非常数亚纯函数, 则或者 $f(z) = \mathrm{e}^{az+b}$, 或者 $f(z) = \dfrac{1}{(az+b)^n}$, 其中 $a(\neq 0), b$ 是有穷复数, $n$ 是正整数.

经过 Hayman[95], Clunie[59], Frank[79], Mues[137], Langley[114] 等人的研究, Langley[114] 最终证明了这个猜测.

**定理 6.3.1** 设 $k(\geqslant 2)$ 是一个正整数, $f$ 是复平面上满足 $f \neq 0$ 和 $f^{(k)} \neq 0$ 的非常数亚纯函数, 则或者 $f(z) = \mathrm{e}^{az+b}$, 或者 $f(z) = \dfrac{1}{(az+b)^n}$, 其中 $a(\neq 0), b$ 是有穷复数, $n$ 是正整数.

定理 6.3.1 的证明见论文 Frank[79], Langley[114].

自然地我们问是否存在相应与定理 6.3.1 的的正规定则?

Schwick [166], Bergweiler[20], Bergweiler 和 Langley[27] 研究并肯定地回答了这个问题, 他们证明了

**定理 6.3.2** 设 $\mathcal{F}$ 是区域 $D$ 内的一族亚纯函数, $k(\geqslant 2)$ 是一个正整数. 若对于 $\mathcal{F}$ 中的任意函数 $f$, $f \neq 0$, $f^{(k)} \neq 0$, 则 $\{f'/f : f \in \mathcal{F}\}$ 在 $D$ 内正规.

**注** Schwick [166] 证明了定理 6.3.2 在全纯函数族的情形; Bergweiler[20] 证明了定理 6.3.2 在 $k=2$ 的情形; Bergweiler 和 Langley[27] 证明了定理 6.3.2 在 $k \geqslant 3$ 的情形. $k \geqslant 3$ 的情形证明比较长, 下面我们只给出定理 6.3.2 在 $k=2$ 时的证明.

为了证明定理 6.3.2 在 $k=2$ 时的情形, 需要如下两个引理.

**引理 6.3.1** 设 $f$ 是复平面 $\mathbb{C}$ 上的有穷级非常数亚纯函数, $K$ 是一个正数. 若 $f(z)=0 \Longrightarrow |f'(z)| \leqslant K$, 且 $f'(z) \neq 1$, 则或者

$$f(z) = z + a + \frac{b}{(z-c)^l}, \tag{6.3.1}$$

其中 $a, b(\neq 0), c$ 是有穷复数, $l$ 是正整数, 或者 $f(z) = \alpha z + \beta$, 其中 $\alpha(\neq 1)$, $\beta$ 是有穷复数.

**证明** 仿引理 4.2.4 的证明不难得到 $f$ 是有理函数. 当 $f$ 是非多项式有理函数时, 则由引理 4.2.2, 即得 (6.3.1); 当 $f$ 是非常数多项式时, 则由 $f'(z) \neq 1$, 即得 $f(z) = \alpha z + \beta$, 其中 $\alpha(\neq 1)$, $\beta$ 是有穷复数. 引理 6.3.1 得证. □

**引理 6.3.2** 设

$$f(z) = z + a + \frac{b}{(z-c)^l},$$

其中 $a, b(\neq 0), c$ 是有穷复数, $l$ 是正整数. 设 $p \in \{0, 1, 2, \cdots, l\}$, 则有

$$\mathrm{Res}\left(\frac{(f')^p}{f}, c\right) = 1 - (l+1)^p.$$

**证明**　当 $p = 0$ 时, 由于 $1/f$ 在 $z = c$ 处全纯, 于是有 $\mathrm{Res}(1/f, c) = 0 = 1 - (l+1)^0$, 因此当 $p = 0$ 时结论成立. 当 $p \geqslant 1$ 时, 在 $z = c$ 的一个邻域内有

$$(f'(z))^p = \left(1 - \frac{bl}{(z-c)^{l+1}}\right)^p = \sum_{v=0}^{p}\binom{p}{v}(-bl)^v(z-c)^{-vl-v},$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{f(z)} &= \frac{b^{-1}(z-c)^l}{1 + b^{-1}(z-c)^l(z+a)} \\ &= b^{-1}(z-c)^l\sum_{\mu=0}^{\infty}(-1)^{\mu}b^{-\mu}(z-c)^{\mu l}(z+a)^{\mu} \\ &= \sum_{v=1}^{\infty}(-1)^{v-1}b^{-v}(z-c)^{vl}(z+a)^{v-1} \\ &= \sum_{v=1}^{\infty}(-1)^{v-1}b^{-v}\sum_{j=0}^{v-1}\binom{v-1}{j}(a+c)^{v-1-j}(z-c)^{vl+j}.\end{aligned}$$

于是不难得到

$$\mathrm{Res}\left(\frac{(f')^p}{f}, c\right) = \sum_{v=1}^{p}\binom{p}{v}(-bl)^v(-1)^{v-1}b^{-v} = -\sum_{v=1}^{p}\binom{p}{v}l^v = 1 - (l+1)^p.$$

引理 6.3.2 证毕. □

**定理 6.3.1 在 $k$=2 时的证明**　令 $\mathcal{G} = \left\{\frac{f}{f'} : f \in \mathcal{F}\right\}$. 则要证明函数族 $\left\{\frac{f'}{f} : f \in \mathcal{F}\right\}$ 在 $D$ 内正规, 只要证明 $\mathcal{G}$ 在 $D$ 内正规. 以下证明 $\mathcal{G}$ 在 $D$ 内正规.

显然, 若 $g(z_0) = 0$, 则 $z_0$ 是 $f \in \mathcal{F}$ 的极点. 设 $z_0$ 是 $f$ 的 $n$ 重极点, 则经简单的计算, 得 $g'(z_0) = -1/n$. 于是有 $g(z) = 0 \Longrightarrow |g'(z)| \leqslant 1$.

假如 $\mathcal{G}$ 在 $D$ 内不正规, 则由引理 3.1.3 知, 存在点列 $z_n \to 0$, 函数列 $g_n(z) \in \mathcal{G}$, 实数列 $\rho_n \to 0^+$, 使得 $h_n(\zeta) = \rho_n^{-1}g_n(z_n + \rho_n\zeta)$ 在复平面 $\mathbb{C}$ 上按球距内闭一致收敛到一个非常数的亚纯函数 $h(\zeta)$, 且对于复平面 $\mathbb{C}$ 上任何点 $z$ 有 $h^{\#}(z) \leqslant h^{\#}(0) = 2$. 于是 $h(\zeta)$ 的级至多为 2.

设 $\zeta_0$ 是 $h$ 的零点, 则对于充分大的 $n$, $h_n$ 有零点 $\zeta_n$, 且有 $\zeta_n \to \zeta_0$. 于是 $z_n + \rho_n\zeta_n$ 是 $g_n$ 零点, 因而由 $g_n(z) = 0 \Longrightarrow |g_n'(z)| \leqslant 1$ 以及 $h_n'(\zeta) = g_n'(z_n + \rho_n\zeta)$, 即得 $|h'(\zeta_0)| \leqslant 1$. 由此即得 $h(z) = 0 \Longrightarrow |h'(z)| \leqslant 1$. 另一方面, 对于任意 $g \in \mathcal{G}$, 我

们由 $g'=\left(\dfrac{f}{f'}\right)'=1-\dfrac{ff''}{(f')^2}$ 和定理条件 $ff''\neq 0$, 得 $g'\neq 1$. 因而由 Hurwitz 定理知, $h'\neq 1$. 于是由引理 6.3.1 可知, 或者 $h(z)=z+a+\dfrac{b}{(z-c)^l}$ 其中 $a,b(\neq 0),c$ 是有穷复数, $l$ 是正整数, 或者 $h(z)=\alpha z+\beta$, 其中 $\alpha(\neq 1),\beta\in\mathbb{C}$ 有穷复数.

如果 $h(z)=\alpha z+\beta$, 其中 $\alpha(\neq 1),\beta\in\mathbb{C}$ 有穷复数, 则有 $|\alpha|\leqslant 1$. 于是即得

$$h^{\#}(0)=\frac{|\alpha|}{1+|\beta|^2}\leqslant|\alpha|<2,$$

与 $h^{\#}(0)=2$ 矛盾. 因此有 $h(z)=z+a+\dfrac{b}{(z-c)^l}$, 其中 $a,b(\neq 0),c$ 是有穷复数, $l$ 是正整数.

令 $m:=l+1$, 则 $h$ 有 $m$ 个零点 $\zeta_1,\zeta_2,\cdots,\zeta_m$(记重数). 取 $R>\max\limits_{1\leqslant j\leqslant m}|\zeta_j|$. 则对于充分大的 $n$, $h_n$ 有 $m$ 个零点 $\zeta_{j,n}\in\Delta(0,R)$, 且当 $n\to\infty$ 时, 有 $\zeta_{j,n}\to\zeta_j$, $(1\leqslant j\leqslant m)$. 于是 $\xi_{j,n}:=z_n+\rho_n\zeta_{j,n}$ 是 $g_n$ 的零点且有 $h_n'(\zeta_{j,n})=g_n'(\xi_{j,n})$, $(1\leqslant j\leqslant m)$. 进一步有 $\xi_{j,n}\in\Delta_n:=\Delta(z_n,\rho_nR)$, $(1\leqslant j\leqslant m)$, 并且当 $n$ 充分大时, $\Delta_n\subset D$ 且 $g_n$ 在 $\Delta_n$ 没有其他的零点.

设 $k\in\{-1\}\cup\{1,2,\cdots,m-2\}$, 则当 $n\to\infty$ 时有

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{m}g_n'(\xi_{j,n})^k &= \sum_{j=1}^{m}h_n'(\zeta_{j,n})^k=\sum_{j=1}^{m}\mathrm{Res}\left(\frac{(h_n')^{k+1}}{h_n},\zeta_{j,n}\right)\\ &\to\sum_{\zeta\in h^{-1}(0)}\mathrm{Res}\left(\frac{(h')^{k+1}}{h},\zeta\right)\end{aligned}$$

其中在最后一个和中, $h$ 的重级零点 $\zeta$ 只出现一次. 因为当 $z\to\infty$ 时有

$$\frac{(h'(z))^{k+1}}{h(z)}=\frac{1}{z}+O(\frac{1}{z^2}).$$

于是由留数定理和引理 6.3.2 知, 当 $n\to\infty$ 时有

$$\sum_{j=1}^{m}g_n'(\xi_{j,n})^k\to 1-\mathrm{Res}\left(\frac{(h')^{k+1}}{h},c\right)=(l+1)^{k+1}=m^{k+1}.$$

另一方面,

$$\sum_{j=1}^{m}g_n'(\xi_{j,n})^k=\sum_{j=1}^{m}(-\frac{1}{n_j})^k\not\to m^{k+1},$$

其中 $n_j(1\leqslant j\leqslant m)$ 是正整数, 矛盾. 所以 $\mathcal{G}$ 在 $D$ 内正规, 即函数族 $\{\dfrac{f}{f'}:f\in\mathcal{F}\}$ 在 $D$ 内正规. □

与本节有关的结果可参看 Schwick [166], Bergweiler[20], Bergweiler 和 Langley[27], Clifford[58].

# 第 7 章　正规族的应用

正规族理论在复分析的许多分支领域都有重要应用. 在 Fatou 与 Julia 关于复动力系统的奠基性研究中, Montel 正规定则起到了重要的作用. 本章简单介绍亚纯函数正规族理论在复动力系统、复微分方程、亚纯函数模分布、整函数唯一性等方面的几个应用.

## 7.1　正规族在复动力系统中的应用

设 $f$ 是一个非分式线性变换的亚纯函数, $n$ 为一整数, 则 $f(z)$ 的 $n$ 次迭代, 记作 $f^n(z)$, 可归纳地定义为 $f^1(z)=f(z)$, 当 $n\geqslant 2$ 时, $f^n(z)=f^{n-1}\circ f(z)$.

在复动力系统中, Fatou 集和 Julia 集是最重要也是最基本的两个概念. $f$ 的 Fatou 集 $F(f)$ 定义为这样的点的集合, 在这种点的某个邻域内, 所有该函数的迭代均有定义并且形成一个正规族. 其余集称为 $f$ 的 Julia 集, 记为 $J(f)$.

设 $z_0\in\overline{\mathbb{C}}$. 如果存在正整数 $p\in\mathbb{N}$, 使得 $f^p(z_0)=z_0$, 则称满足该式的最小正整数 $p$ 为 $f(z)$ 的一个周期, $z_0$ 称为 $f(z)$ 的一个周期为 $p$ 的周期点, 特别地, 周期为 1 的周期点称为不动点.

设 $z_0\in\overline{\mathbb{C}}$ 为 $f(z)$ 的一个周期为 $p$ 的周期点. 当 $z_0\neq\infty$ 时, 定义 $z_0$ 的乘子 $\lambda=(f^p)'(z_0)$; 而当 $z_0=\infty$ 时, 定义乘子 $\lambda=\lim\limits_{z\to\infty}\dfrac{1}{(f^p)'(z)}$ (参见文献 [160]23 页). 进一步地, 按照 $|\lambda|<1$, $|\lambda|=1$ 或 $|\lambda|>1$, 称周期点 $z_0$ 是吸引的, 中性的或排斥的, 特别是排斥周期点在复动力系统中起着非常重要的作用. 我们熟知有理函数的 Julia 集就是所有排斥周期点所成之集的闭包. 这个结果对于超越整函数与超越亚纯函数也成立.

**定理 7.1.1**　*设 $f$ 为一个超越整函数, 则 $f$ 的 Julia 集 $J(f)$ 是它的排斥周期点的闭包.*

**证明**　令

$$A=\left\{w\in\mathbb{C}:\ \varlimsup_{n\to\infty}\frac{\overline{N}\left(r,\dfrac{1}{f-w}\right)}{T(r,f)}\leqslant\frac{1}{2}\right\}.$$

则由 Nevanlinna 第二基本定理可知集合 $A$ 的元素最多有两个.

任取 $w \notin A$, 则方程 $f(z) = w$ 有无穷多个单重根.

下面我们证明 $f$ 的排斥周期点在 $J(f) \setminus A$ 内稠密.

设 $w_0 \in J(f) \setminus A$, 则 $\{f^n : n = 1, 2, 3, \cdots\}$ 在 $w_0$ 处不正规. 因此存在函数列 $f_{n_k} : k = 1, 2, 3, \cdots$, 点列 $z_{n_k} \to w_0$ 以及正数列 $\rho_{n_k} \to 0^+$, 使得 $f_{n_k}(z_{n_k} + \rho_{n_k}\zeta)$ 在复平面 $\mathbb{C}$ 上内闭一致收敛到一个非常数的整函数 $h$. 于是 $f_{n_k+1}(z_{n_k} + \rho_{n_k}\zeta)$ 在复平面 $\mathbb{C}$ 上内闭一致收敛到一个非常数的整函数 $f(h)$. 因为 $w_0 \notin A$, 所以存在互相判别的 $\zeta_j, j \in \mathbb{N}$ 使得 $f(\zeta_j) = w_0$, $f'(\zeta_j) \neq 0$.

如果 $h$ 是超越的整函数, 则在 $\{\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3\}$ 中, 存在 $\zeta_j$ 使得 $\Theta(\zeta_j, h) < 1/2$. 因此存在 $\zeta_0$, 使得 $h(\zeta_0) = \zeta_j$, $h'(\zeta_0) \neq 0$.

如果 $h$ 是多项式, 则方程 $h(\zeta) = \zeta_j (j = 1, 2)$ 中有一个方程有单重根 $\zeta_0$.

在两种情形中, 我们都有

$$f(h(\zeta_0)) = w_0, \ (f(h))'(\zeta_0) \neq 0,$$

于是即得 $f_{n_k+1}(z_{n_k} + \rho_{n_k}\zeta) - (z_{n_k} + \rho_{n_k}\zeta)$ 在复平面 $\mathbb{C}$ 上内闭一致收敛到一个非常数的整函数 $f(h(\zeta)) - w_0$.

由于方程 $f(h(\zeta)) - w_0 = 0$ 有解, 并且极限函数 $f(h(\zeta)) - w_0$ 是非常数函数, 所以由 Hurwitz 定理可知, 对于充分大的 $n_k$ 方程 $f_{n_k+1}(z_{n_k} + \rho_{n_k}\zeta) = (z_{n_k} + \rho_{n_k}\zeta)$ 有解 $\bar{\zeta}_{n_k}$, 并且 $\bar{\zeta}_{n_k} \to \zeta_0$. 于是 $z_{n_k} + \rho_{n_k}\bar{\zeta}_{n_k}$ 是 $f_{n_k+1}$ 的不动点, 且有 $z_{n_k} + \rho_{n_k}\bar{\zeta}_{n_k} \to w_0$. 因为

$$\rho_{n_k}(f_{n_k+1})'(z_{n_k} + \rho_{n_k}\bar{\zeta}_{n_k}) = (f_{n_k+1}(z_{n_k} - \rho_{n_k}\zeta))'|\zeta = \bar{\zeta}_{nk} \to (f(h))'(\zeta_0) \neq 0,$$

所以对于充分大的 $n_k$, $z_{n_k} + \rho_{n_k}\bar{\zeta}_{n_k}$ 是 $f_{n_k+1}$ 的排斥不动点. 于是证得 $f$ 的排斥周期点在 $J(f) \setminus A$ 内稠密. 由于 $f$ 的 Julia 集 $J(f)$ 是完备的, 因此定理 7.1.1 结论成立. □

**注** 定理 7.1.1 是 Baker [3] 获得的, 他是用 Ahlfors 五岛定理证明的. 上面介绍的用到亚纯函数正规族理论的证明是 Schwick[168] 给出的. 对于非线性有理函数及超越亚纯函数也可以用上述方法类似证明.

与本节相关的内容参见文献 [5], [33].

## 7.2 正规族在复微分方程中的应用

Gol'dberg[83] 证明了复平面上满足一阶代数微分方程的亚纯函数必为有穷级亚纯函数. Bank, Kaufman[4] 和 Barsgian[9] 用不同的方法证明了上述 Gol'dberg 结果. 本节介绍 Bergweiler[19] 给出的以正规族理论中的 Zalcman 引理为主要工具的一种

证明. 事实上证明了由 Barsegian[10] 给出的 Gol'dberg 定理被推广到高阶微分方程的情形.

设 $f$ 为复平面上的亚纯函数, $n$ 为正整数, $r_j, j=1,2,\cdots,n$ 为非负整数, $r=(r_1,r_2,\cdots,r_n)$. 称 $M_r[f]=f'(z)^{r_1}f''(z)^{r_2}\cdots f^{(n)}(z)^{r_n}$ 为 $f$ 的微分单项式, 规定 $M_0[f]=1$. 记 $\omega(r)=r_1+2r_2+\cdots+nr_n$. 称 $P[f]=\sum\limits_{r\in I}a_r(z,f(z))M_r[f]$ 为 $f$ 的微分多项式, 其中 $a_r$ 为二元有理函数, $I$ 为有穷个元素的指标集, 记 $\omega(P)=\max\limits_{r\in I}\omega(r)$.

**定理 7.2.1**　*设 $f$ 为复平面上的亚纯函数, $n$ 为正整数且满足 $n>\omega(P)$. 若 $f$ 满足微分方程 $(f')^n=P[f]$, 则 $f$ 为有穷级亚纯函数.*

**注**　*显然一阶代数微分方程能写成定理中的形式, 故 Gol'dberg 定理为上述定理的一个特例.*

**证明**　假设 $f$ 为无穷级亚纯函数, 则由亚纯函数级的定义与 Ahlfors-Shimizu 形式的特征函数知, 存在数列 $\{w_k\}$, 使当 $k\to\infty$ 时, 有 $\dfrac{\log f^{\#}(w_k)}{\log|w_k|}\to\infty$, 其中 $f^{\#}(z)$ 为 $f$ 的球面导数.

记 $f_k(z)=f(w_k+z)$, $\mathcal{F}=\{f_k(z):k=1,2,3,\cdots\}$, $\Delta=\{z:|z|<1\}$. 由于 $f_k^{\#}(0)=f^{\#}(w_k)\to\infty$, 于是由 Marty 定则知, $\mathcal{F}$ 在 $\Delta$ 内不正规. 因此由引理 3.1.3 知, 存在点列 $z_k\in\Delta$, 正数列 $\rho_k\to0^+$ 使得 $g_k(\zeta)=f_k(z_k+\rho_k\zeta)=f(w_k+z_k+\rho_k\zeta)$ 在复平面 $\mathbb{C}$ 上按球距内闭一致收敛到一个非常数的亚纯函数 $g(\zeta)$.

记 $b_k=w_k+z_k$, 从引理 3.1.3 的证明可知, $\rho_k=\dfrac{1}{f_k^{\#}(z_k)}=\dfrac{1}{f^{\#}(b_k)}$, $f^{\#}(b_k)=f_k^{\#}(z_k)\geqslant f_k^{\#}(0)=f^{\#}(w_k)$.

于是结合 $\dfrac{\log f^{\#}(w_k)}{\log|w_k|}\to\infty$ 可知, 对任意常数 $M$, 当 $k\to\infty$ 时, 有 $|b_k^M\rho_k|=|\dfrac{b_k^M}{f^{\#}(b_k)}|\leqslant\dfrac{(|z_k|+r)^M}{f^{\#}(w_k)}\to0$, 即 $b_k^M\rho_k\to0$. 在微分方程 $(f')^n=P[f]$ 中, 用 $b_k+\rho_k\zeta$ 替换 $\zeta$ 可得

$$\rho_k^{-n}[h_k'(\zeta)]^n=\sum_{r\in I}a_r(b_k+\rho_k\zeta,g_k(\zeta))\rho_k^{-\omega(r)}M_r[g_k](\zeta).$$

两边同乘以 $\rho_k^n$ 得

$$[g_k'(z)]^n=\sum_{r\in I}a_r(b_k+\rho_k\zeta,g_k(\zeta))\rho_k^{n-\omega(r)}M_r[g_k](\zeta).$$

令 $k\to\infty$ 得, 左边的极限为 $[g'(\zeta)]^n$, 由于对于每一个 $r\in I$, $n-w(r)\geqslant1$, 且对于任意固定的正数 $l$ 有 $b_k^l\rho_k\to0$, 所以右边的极限为 0. 于是有 $[g'(\zeta)]^n=0$, 故 $g(\zeta)$ 为常数, 矛盾. 所以 $f$ 为有穷级亚纯函数. 定理 7.2.1 得证. □

这方面进一步的结果请看文献 [81], 与本节相关的内容参看文献 [123].

## 7.3 正规族在模分布中的应用

2000 年, 方明亮 [68] 利用正规族理论证明了

**定理 7.3.1** *设 $f$ 是一个超越亚纯函数, 若 $f$ 的零点和极点的重级均 $\geqslant 2$, 则 $f'$ 有无穷多个不动点.*

**证明** 分两种情形讨论.

**情形 1** $f$ 只有有限个零点. 于是有

$$N\left(r, \frac{1}{f}\right) = O(\log r) = S(r, f). \tag{7.3.1}$$

由 Nevanlinna 理论, 易得

$$\begin{aligned}
&m\left(r, \frac{1}{f}\right) + m\left(r, \frac{1}{f'-z}\right)\\
\leqslant& m\left(r, \frac{1}{f''}\right) + m\left(r, \frac{1}{f''-1}\right) + S(r, f)\\
\leqslant& m\left(r, \frac{1}{f''} + \frac{1}{f''-1}\right) + S(r, f)\\
\leqslant& m\left(r, \frac{1}{f^{(3)}}\right) + S(r, f)\\
=& T(r, f^{(3)}) - N\left(r, \frac{1}{f^{(3)}}\right) + S(r, f)\\
\leqslant& T(r, f') + 2\overline{N}(r, f) - N\left(r, \frac{1}{f^{(3)}}\right) + S(r, f),
\end{aligned}$$

由定理 1.6.3 及 (7.3.1) 得

$$\begin{aligned}
T(r, f) \leqslant& 2\overline{N}(r, f) + N\left(r, \frac{1}{f}\right) + N\left(r, \frac{1}{f'-z}\right) - N\left(r, \frac{1}{f^{(3)}}\right) + S(r, f)\\
\leqslant& \frac{2}{3}N(r, f) + N\left(r, \frac{1}{f}\right) + N\left(r, \frac{1}{f'-z}\right) + \frac{1}{6}T(r, f) + S(r, f)\\
\leqslant& \frac{5}{6}T(r, f) + N\left(r, \frac{1}{f'-z}\right) + S(r, f).
\end{aligned}$$

于是即得

$$T(r, f) \leqslant 6N\left(r, \frac{1}{f'-z}\right) + S(r, f).$$

因此 $f'(z)$ 有无穷多个不动点.

**情形 2** $f$ 有无穷多个零点, 记为 $z_1, z_2, \cdots$. 下面我们再分两种情形讨论.

**情形 2.1** $f$ 是有穷级亚纯函数. 令 $g(z) = f(z) - \frac{1}{2}z^2$, 则 $g'(z) = f'(z) - z$. 下面我们只要证明 $g'(z)$ 有无穷个零点. 假如 $g'(z)$ 只有有限多个零点, 则由定理 3.3.1

知, $g(z)$ 没有非直接渐近值. 于是由 Denjoy-Carleman-Ahlfors 定理 (参见文献 [138]) 知, $g(z)$ 至多有 $2\rho_g$ 个渐近值. 故 $g(z)$ 的临界值只有有限个, 所以为有界的 (参见文献 [26] 中推论 3). 于是由引理 3.3.4 得

$$\frac{|z_j g'(z_j)|}{|g(z_j)|} \geqslant \frac{1}{16\pi}\log|g(z_j)| = \frac{1}{16\pi}\log\frac{1}{2}|z_j|^2.$$

因为当 $j \to \infty$ 时, $\frac{1}{16\pi}\log|g(z_j)| \to \infty$, 于是当 $j \to \infty$ 时, $\frac{|z_j g'(z_j)|}{|g(z_j)|} \to \infty$. 另一方面由定理条件得, 当 $j \to \infty$ 时, $\frac{|z_j g'(z_j)|}{|g(z_j)|} \to n+1$, 矛盾. 因此 $f'(z)$ 有无穷多个不动点.

**情形 2.2** $f(z)$ 是无穷级亚纯函数. 则有

$$\lim_{r\to\infty}\frac{T(r,f)}{(\log r)^2} = \infty. \tag{7.3.2}$$

于是即得

$$\lim_{r\to\infty}\frac{T\left(r,\dfrac{f(z)}{z^2}\right)}{(\log r)^2} = \infty. \tag{7.3.3}$$

因此由球面特征函数的定义结合 (7.3.3) 得

$$\lim_{r\to\infty}\frac{A\left(r,\dfrac{f(z)}{z^2}\right)}{\log r} = \infty. \tag{7.3.4}$$

置

$$\mathcal{F} = \left\{g_n(z) = \frac{f(2^n z)}{2^{2n}z^2}, n = 1,2,3,\cdots, \frac{1}{2} < |z| < \frac{5}{2}\right\},$$

则 $\mathcal{F}$ 不是正规族.

事实上, 假如 $\mathcal{F}$ 是正规族. 则由 Marty 定则可知, 存在 $M > 0$ 满足

$$g_n^{\#}(z) \leqslant M, \quad 其中\ n = 1,2,3,\cdots, 1 \leqslant |z| \leqslant 2.$$

于是即得

$$\begin{aligned}
A(2^n, \frac{f(z)}{z^2}) &= \frac{1}{\pi}\iint_{|z|\leqslant 2^n}((\frac{f(z)}{z^2})^{\#})^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y \quad (z = x + \mathrm{i}y)\\
&= \frac{1}{\pi}\sum_{m=0}^{n-1}\iint_{2^m\leqslant|z|\leqslant 2^{m+1}}((\frac{f(z)}{z^2})^{\#})^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\
&= \frac{1}{\pi}\sum_{m=0}^{n-1}\iint_{1\leqslant|w|\leqslant 2}(g_m^{\#}(w))^2\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta \quad (w = \xi + \mathrm{i}\eta)\\
&\leqslant 3M^2 n = M_1 n, \quad (M_1 = 3M^2).
\end{aligned}$$

因此, 对于任意 $r>0,\ 2^{n-1}\leqslant r<2^n$, 我们有

$$A\left(r,\frac{f(z)}{z^2}\right)\leqslant A\left(2^n,\frac{f(z)}{z^2}\right)\leqslant M_1 n\leqslant M_1\left(\frac{\log r}{\log 2}+1\right),$$

这式与 (7.3.4) 矛盾. 所以 $\mathcal{F}$ 不是正规族. 令

$$\mathcal{F}_1=\left\{h_n(z)=\frac{f(2^n z)}{2^{2n}}:n=1,2,3,\cdots,\frac{1}{2}<|z|<\frac{5}{2}\right\},$$

则 $\mathcal{F}_1$ 也不是正规族. 于是由第 4 章第 2 节后的注 (令 $a(z)=z$) 知, 存在无穷个点 $z_n$ 满足 $h_n'(z_n)=z_n$, 即 $f'(2^n z_n)=2^n z_n$. 所以 $f'(z)$ 有无穷多个不动点. 综合上述情形可知, $f'(z)$ 有无穷多个不动点, 定理 7.3.1 得证. □

由定理 7.3.1 即得

**推论** *设 $f$ 是一个超越亚纯函数, $n$ 是一个正整数, 则 $f^n f'$ 有无穷多个不动点.*

W. Bergweiler 和庞学诚 [29] 用完全不同的方法改进了定理 7.3.1, 证明了

**定理 7.3.2** *设 $f$ 是一个超越亚纯函数, $R(\not\equiv 0)$ 是一个有理函数, 若 $f$ 的零点和极点的重级均 $\geqslant 2$, 则 $f'-R$ 有无穷多个零点.*

**问题 7.1** *设 $f$ 是一个超越亚纯函数, $a(\not\equiv 0)$ 是一个满足 $T(r,a)=S(r,f)$ 的亚纯函数. 若 $f$ 的零点和极点的重级均 $\geqslant 2$, 问 $f'-a$ 是否有无穷多个零点.*

与上述内容相关的结果, 请参看文献 [197], [198].

**定理 7.3.3** *设 $f$ 是复平面上满足 $f\neq 0,\ f''\neq 0$ 的非常数亚纯函数, 则或者 $f(z)=\mathrm{e}^{az+b}$, 或者 $f(z)=\dfrac{1}{(az+b)^n}$, 其中 $a(\neq 0), b$ 是有穷复数, $n$ 是正整数.*

**证明** 令

$$\mathcal{F}=\{F_w=f(z+w):\ w\in\mathbb{C}\},$$

则 $\mathcal{F}$ 是单位圆 $\Delta=\{z:\ |z|<1\}$ 内的一族亚纯函数. 于是对于任意 $F_w(z)\in\mathcal{F}$, 有 $F_w(z)\neq 0,\ F_w''(z)\neq 0$, 从而由定理 6.3.1 知, 函数族 $\left\{g_w=\dfrac{F_w'}{F_w}:\ F_w\in\mathcal{F}\right\}$ 在单位圆 $\Delta$ 内正规, 于是函数族 $\mathcal{G}=\left\{g_w=\dfrac{F_w}{F_w'}:\ F_w\in\mathcal{F}\right\}$ 在单位圆 $\Delta$ 内也正规. 故由 Marty 定则可知, 存在常数 $M$ 使得对任何 $w\in\mathbb{C}$ 有

$$\left(\frac{f}{f'}\right)^{\#}(w)=\frac{\left|\left(\dfrac{f}{f'}\right)'(w)\right|}{1+\left|\left(\dfrac{f}{f'}\right)(w)\right|^2}=\frac{|g_w'(0)|}{1+|g_w(0)|^2}=g_w^{\#}(0)\leqslant M.$$

从而由定理 1.3.2 知, $\frac{f}{f'}$ 的级至多为 2. 经简单计算知, $\frac{f(z)}{f'(z)}=0\Rightarrow\left|\left(\frac{f(z)}{f'(z)}\right)'\right|\leqslant 1$, $\left(\frac{f(z)}{f'(z)}\right)'\neq 1$. 于是由引理 6.9 可知, 或者 $\frac{f(z)}{f'(z)}=z+a+\frac{b}{(z-c)^l}$ 其中 $a,b(\neq 0),c$ 是有穷复数, $l$ 是正整数; 或者 $\frac{f(z)}{f'(z)}=\alpha z+\beta$, 其中 $\alpha(\neq 1),\beta\in\mathbb{C}$ 是有穷复数.

结合 $f\neq 0$ 得

$$f(z)=\frac{\mathrm{e}^{h(z)}}{p(z)},$$

其中 $h(z)$ 是整函数, $p(z)$ 是非常数多项式. 于是有

$$f'(z)=\frac{h'(z)p(z)-p'(z)}{p^2(z)}\mathrm{e}^{h(z)},$$

$$\frac{f(z)}{f'(z)}=\frac{p(z)}{h'(z)p(z)-p'(z)}.$$

若 $\frac{f(z)}{f'(z)}=z+a+\frac{b}{(z-c)^l}$, 其中 $a,b(\neq 0),c$ 是有穷复数, $l$ 是正整数, 则

$$\frac{p(z)}{h'(z)p(z)-p'(z)}=\frac{(z+a)(z-c)^l+b}{(z-c)^l}.$$

于是即得 $h'(z)\equiv 0$. 所以有

$$-\frac{p(z)}{p'(z)}=\frac{(z+a)(z-c)^l+b}{(z-c)^l},$$

即

$$p(z)(z-c)^l=-p'(z)[(z+a)(z-c)^l+b].$$

设 $p(z)=a_0z^n+a_1z^{n-1}+\cdots+a_{n-1}z+a_n$, 其中 $a_0(\neq 0)$, $n\geqslant 1$, 代入上式即得 $a_0=-na_0$, 矛盾.

所以

$$\frac{f(z)}{f'(z)}=\alpha z+\beta,$$

其中 $\alpha(\neq 1),\beta\in\mathbb{C}$ 是有穷复数. 于是有

$$\frac{p(z)}{h'(z)p(z)-p'(z)}=\alpha z+\beta.$$

以下分两种情形讨论.

**情形 1** $\alpha=0$. 则 $\beta\neq 0$. 于是即得 $f(z)=\mathrm{e}^{az+b}$, 其中 $a=\frac{1}{\beta}(\neq 0),b$ 是有穷复数.

**情形 2** $\alpha \neq 0$. 则 $h'(z) \equiv 0$. 于是有

$$p(z) = -p'(z)(\alpha z + \beta).$$

由此不难知道 $p(z) = (az+b)^n$, 于是有

$$f(z) = \frac{1}{(az+b)^n},$$

其中 $a(\neq 0), b$ 是有穷复数, $n$ 是正整数. 定理 7.3.3 得证. □

## 7.4 正规族在整函数唯一性中的应用

设 $f$ 是非常数亚纯函数, $S$ 是一个复数集合. 令

$$E(S,f) = \bigcup_{a\in S}\{z:\ f(z) - a = 0\},$$

这里 $m$ 重零点在 $E(S,f)$ 中重复 $m$ 次. 若 $S = \{a\}$, 则把 $E(S,f)$ 记为 $E(a,f)$.

2003 年, 方明亮和 L. Zalcman [77] 使用正规族理论证明了如下唯一性定理.

**定理 7.4.1** *存在一个具有三个元素的复数集合 $S$, 使得对于任意非常数的整函数 $f$, 只要 $f$ 满足 $E(S,f) = E(S,f')$, 则必有 $f \equiv f'$.*

**证明** 令 $S = \{0, a, b\}$, 其中 $a, b$ 是两个判别的非零有穷复数, 并且满足 $a^2 \neq b^2$, $a \neq 2b$, $b \neq 2a$, $a^2 - ab + b^2 \neq 0$. 设非常数的整函数 $f$ 满足 $E(S,f) = E(S,f')$. 令

$$\phi(z) = \frac{f'(z)[f'(z)-a][f'(z)-b]}{f(z)[f(z)-a][f(z)-b]}. \tag{7.4.1}$$

则由 $E(S,f) = E(S,f')$ 可知, 存在一个整函数 $h$ 满足

$$\phi(z) = \frac{f'(z)[f'(z)-a][f'(z)-b]}{f(z)[f(z)-a][f(z)-b]} = \mathrm{e}^{h(z)}. \tag{7.4.2}$$

经过一些简单的计算并由对数导数引理得

$$m(r,\phi) = S(r,f), \tag{7.4.3}$$

于是即得

$$T(r,\phi) = S(r,f). \tag{7.4.4}$$

我们首先证明 $f$ 的级 $\leqslant 1$. 令

$$\mathcal{F}=\{f(z+w):\ w\in\mathbb{C}\},\ z\in D=\{z:\ |z|<1\}.$$

则 $\mathcal{F}$ 是区域 $D$ 内的一族全纯函数. 经过计算, 对于 $\mathcal{F}$ 中的任意函数 $g(z)=f(z+w)$, 当 $g(z)=0,a,b$ 时, 有 $|g'(z)|\leqslant\max\{|a|,|b|\}$. 因此由定理 5.3.2 知, $\mathcal{F}$ 在 $D$ 内正规. 于是由定理 2.2.5 知, 存在 $M>0$ 使得, 当 $z\in\mathbb{C}$ 时, 有 $f^{\#}(z)\leqslant M$. 所以由定理 1.3.3 知, $f$ 的级 $\leqslant 1$.

因此, $T(r,f)=O(r)$, 而 $S(r,f)=O(\log r)$. 于是由 (7.4.4) 可知, $\phi$ 是一个多项式, 于是由 (7.4.2) 知, $\phi$ 一定是一个非零常数, 记为 $A$. 故有

$$\frac{f'(z)[f'(z)-a][f'(z)-b]}{f(z)[f(z)-a][f(z)-b]}=A,$$

即

$$f'(z)[f'(z)-a][f'(z)-b]=Af(z)[f(z)-a][f(z)-b]. \tag{7.4.5}$$

对 (7.4.5) 的两边求导得

$$[3(f')^2-2(a+b)f'+ab]f''=A[3f^2-2(a+b)f+ab]f'. \tag{7.4.6}$$

我们断言: $f'\neq 0$. 事实上, 若存在 $z_0$ 使得 $f'(z_0)=0$, 设在 $z_0$ 附近的泰勒展式为

$$f(z)=f(z_0)+A_n(z-z_0)^n+\cdots,$$

其中 $A_n\neq 0$, $n\geqslant 2$, 则 $z_0$ 是 (7.4.6) 式左边的 $n-2$ 重零点, 右边的 $n-1$ 重零点, 矛盾. 于是有

$$f'(z)=BC\mathrm{e}^{Cz}, \tag{7.4.7}$$

即

$$f(z)=D+B\mathrm{e}^{Cz}, \tag{7.4.8}$$

其中 $B\neq 0$, $C\neq 0$ 和 $D$ 是常数.

如果 $D\neq 0,a,b$, 则由 Nevanlinna 第二基本定理得

$$T(r,f)\leqslant\overline{N}\left(r,\frac{1}{f}\right)+\overline{N}\left(r,\frac{1}{f-D}\right)+S(r,f)=\overline{N}\left(r,\frac{1}{f}\right)+S(r,f),$$

即有

$$\overline{N}\left(r,\frac{1}{f}\right)=T(r,f)+S(r,f). \tag{7.4.9}$$

类似地, 我们得

$$\overline{N}\left(r,\frac{1}{f-a}\right)=T(r,f)+S(r,f),$$

$$\overline{N}\left(r,\frac{1}{f-b}\right)=T(r,f)+S(r,f). \tag{7.4.10}$$

于是由 (7.4.9), (7.4.10), $E(S,f)=E(S,f')$ 和 Nevanlinna 第一基本定理得

$$\begin{aligned}3T(r,f)&=\overline{N}\left(r,\frac{1}{f}\right)+\overline{N}\left(r,\frac{1}{f-a}\right)+\overline{N}\left(r,\frac{1}{f-b}\right)+S(r,f)\\&\leqslant\overline{N}\left(r,\frac{1}{f'-a}\right)+\overline{N}\left(r,\frac{1}{f'-b}\right)+S(r,f)\\&\leqslant 2T(r,f')+S(r,f)\leqslant 2T(r,f)+S(r,f).\end{aligned}$$

由此即得 $T(r,f)=S(r,f)$, 这与 (7.4.8) 矛盾. 所以 $D\in\{0,a,b\}$.

以下我们考虑三种情形.

**情形 1** $D=0$. 则由 (7.4.7) 和 (7.4.8) 得

$$f(z)=B\mathrm{e}^{Cz},\quad f'(z)=BC\mathrm{e}^{Cz}. \tag{7.4.11}$$

设 $f(z_1)=a$, 则由 $E(S,f)=E(S,f')$ 可知, 或者 $f'(z_1)=a$, 或者 $f'(z_1)=b$. 如果 $f'(z_1)=a$, 则由 (7.4.11) 得 $C=1$, 于是即得 $f\equiv f'$. 如果 $f'(z_1)=b$, 则由 (7.4.11) 得

$$C=\frac{b}{a}. \tag{7.4.12}$$

类似地, 如果 $f(z_2)=b$, 则或者 $f'(z_2)=a$, 或者 $f'(z_2)=b$; 如果 $f'(z_2)=b$, 则有 $C=1$, 于是有 $f\equiv f'$; 如果 $f'(z_2)=a$, 则由 (7.4.11) 得

$$C=\frac{a}{b}. \tag{7.4.13}$$

因此由 (7.4.12) 和 (7.4.13) 可知, 或者 $f\equiv f'$, 或者 $a^2=b^2$. 若 $a^2=b^2$, 则与 $a$ 和 $b$ 的选取矛盾. 于是即得, 当 $D=0$ 时有 $f\equiv f'$.

**情形 2** $D=a$. 则由 (7.4.7) 和 (7.4.8) 得

$$f(z)=a+B\mathrm{e}^{Cz},\quad f'(z)=BC\mathrm{e}^{Cz}. \tag{7.4.14}$$

设 $f(z_3)=0$. 则由 $E(S,f)=E(S,f')$ 可知, 或者 $f'(z_3)=a$, 或者 $f'(z_3)=b$.

若 $f'(z_3)=a$, 则由 (7.4.14) 得 $C=-1$. 于是有

$$f(z)=a+B\mathrm{e}^{-z},\quad f'(z)=-B\mathrm{e}^{-z}. \tag{7.4.15}$$

设 $f(z_4)=b$. 则由 $E(S,f)=E(S,f')$ 可知, 或者 $f'(z_4)=a$, 或者 $f'(z_4)=b$. 如果 $f'(z_4)=a$, 则由 (7.4.15) 得 $b=0$, 与 $b\neq 0$ 矛盾. 如果 $f'(z_4)=b$, 则有 $a=2b$, 与 $a\neq 2b$ 矛盾.

若 $f'(z_3)=b$, 则我们类似可得 $C=-b/a$,

$$f(z)=a+B\mathrm{e}^{-\frac{b}{a}z},\qquad f'(z)=-\frac{b}{a}B\mathrm{e}^{-\frac{b}{a}z}. \tag{7.4.16}$$

取 $z_5$ 使得 $f(z_5)=b$, 则或者 $f'(z_5)=a$, 或者 $f'(z_5)=b$. 如果 $f'(z_5)=a$, 则由 (7.4.16), 得 $a^2-ab+b^2=0$, 矛盾. 类似地, 如果 $f'(z_5)=b$, 则有 $b=0$, 矛盾.

于是情形 2 不会出现.

**情形 3**　$D=b$. 类似于情形 2 的讨论可知, 这种情形也不会出现.

综合上述讨论我们证得 $f\equiv f'$. 定理 7.4.1 得证. □

设 $f(z)=\mathrm{e}^{-z}+a+b$, $S=\{a,b\}$, 其中 $a,b$ 是任意两个不同的有穷复数, 则 $f'(z)=-\mathrm{e}^{-z}$. 显然, $E(S,f)=E(S,f')$; 但是 $f\not\equiv f'$. 这表明定理 7.4.1 中数字 3 是最佳的.

1986 年, Jank-Mues-Volkmann [111] 证明了: *设 $f$ 是一个非常数整函数, $a$ 是一个非零有限复数. 若 $f$ 和 $f'$ 分担值 $a$, 并且 $f'(z)=a\Longrightarrow f''(z)=a$, 则 $f\equiv f'$.*

这个结果已经被许多人做了推广和改进参见文献 [40], [77], [92], [122], [211], [204].

使用正规族理论, 常建明和方明亮 [41] 证明了

**定理 7.4.2**　*设 $f$ 是一个非常数整函数, $a$ 是一个非零有穷复数, $k(\geqslant 2)$ 是一个正整数. 若 $f(z)=a\Longrightarrow f'(z)=a$, $f'(z)=a\Longrightarrow f^{(k)}(z)=a$, 则或者*

$$f(z)=C\mathrm{e}^{\lambda z}+a\quad 或者\quad f(z)=C\mathrm{e}^{\lambda z}+\frac{a(\lambda-1)}{\lambda},$$

*其中 $C$、$\lambda$ 是非零常数, 满足 $\lambda^{k-1}=1$.*

为了证明定理 7.4.2, 我们需要如下引理.

**引理 7.4.1**　*设 $k(\geqslant 2)$ 是一个正整数, $a$ 是一个非零有穷复数. 又设 $f$ 是一个整函数满足 $f(z)=a\Longrightarrow f'(z)=a$, $f'(z)=a\Longrightarrow f^{(k)}(z)=a$, 则*

$$f^{(k)}-f'-c(f-a)\equiv 0,$$

*其中 $c$ 是一常数.*

**证明** 令

$$\mathcal{F} = \{F_w = f(z+w) - a:\ w \in \mathbb{C}\},$$

则 $\mathcal{F}$ 是单位圆 $\Delta = \{z:\ |z| < 1\}$ 内的一族全纯函数. 于是对于任意 $F_w(z) \in \mathcal{F}$ , 有 $F_w(z) = 0 \Longrightarrow F_w'(z) = a$, $F_w'(z) = a \Longrightarrow F_w^{(k)}(z) = a$, 从而由定理 5.4.2 知, $\mathcal{F}$ 在单位圆 $\Delta$ 内正规, 于是函数族 $\{g_w(z) = f(z+w) : w \in \mathbb{C}\}$ 在单位圆 $\Delta$ 内也正规. 故由 Marty 定则可知, 存在常数 $M(>0)$ 使得对任何 $w \in \mathbb{C}$ 有

$$f^{\#}(w) = \frac{|f'(w)|}{1+|f(w)|^2} = \frac{|g_w'(0)|}{1+|g_w(0)|^2} = g_w^{\#}(0) \leqslant M.$$

从而由定理 1.3.3 知, $f$ 的级至多为 1. 作辅助函数

$$\phi(z) = \frac{f^{(k)}(z) - f'(z)}{f(z) - a}.$$

则由定理 1.5.1(对数导数引理) 的推论 3 可知

$$m(r, \phi) = o(\log r).$$

于是由引理的条件知, $\phi$ 是一整函数, 从而有 $T(r,\phi) = m(r,\phi) = o(\log r)$. 由此即知 $\phi$ 为常数 $c$. 引理 7.4.1 得证. □

下面的两个引理是显然的.

**引理 7.4.2** *设 $a, b$ 是两个实数, $k \geqslant 2$ 是一整数, 则方程 $x^k + ax + b = 0$ 至多有三个不同的实根. 进一步地, 若该方程恰好有三个不同的实根 $x_1 < x_2 < x_3$, 则一定有 $x_1 < 0$, $x_3 > 0$.*

**引理 7.4.3** *设 $A, B, \alpha, \beta$ 是非零有穷复数. 若*

$$\mathrm{e}^{\alpha z} = A \implies \mathrm{e}^{\beta z} = B,$$

*则存在非零整数 $k$ 使得 $\beta = k\alpha$.*

**定理 7.4.2 的证明** 由引理 7.4.1 得

$$f^{(k)}(z) - f'(z) - c[f(z) - a] = 0, \tag{7.4.17}$$

这里 $c$ 是常数.

解方程 (7.4.17) 得

$$f(z) - a = \sum_{j=1}^{s} P_j(z)\mathrm{e}^{\lambda_j z}, \tag{7.4.18}$$

这里 $1 \leqslant s \leqslant k$, $\lambda_j(j=1,2,\cdots,s)$ 是特征方程 $z^k-z-c=0$ 的不同的根, $P_j(z)(\not\equiv 0)(j=1,2,\cdots,s)$ 是多项式.

由 (7.4.18) 得

$$f'(z)=\sum_{j=1}^{s}[P_j'(z)+\lambda_j P_j(z)]\mathrm{e}^{\lambda_j z}. \tag{7.4.19}$$

记 $\Omega$ 是包含 $\overline{\lambda}_j(j=1,2,\cdots,s)$ 的最小凸闭包.

下面, 我们考虑三种情形.

**情形 1**　$s\geqslant 3$. 此时有 $k\geqslant 3$. 以下再分两种子情形讨论.

**情形 1.1**　$\lambda_j(1\leqslant j\leqslant s)$ 不都在一条通过原点的直线上. 此时我们可找到 $\partial\Omega$ 的一条边 $\partial_1$, 设它的两个端点为 $\overline{\lambda}_1$ 和 $\overline{\lambda}_l$, 使得 $\overline{\lambda}_j(2\leqslant j\leqslant l-1)$ 落在 $\partial_1$ 上, 并且 $\partial_1$ 所在的直线不通过原点. 不失一般性, 我们可设有 $\mathrm{Im}(\lambda_1)=\mathrm{Im}(\lambda_2)=\cdots=\mathrm{Im}(\lambda_l)=y_0$, $\mathrm{Im}(\lambda_j)>y_0(l+1\leqslant j\leqslant s)$, (否则, 我们可象在证明引理 5.4.1 时那样作一旋转). 于是 $y_0\neq 0$ 并且 $\arg z=\pi/2$ 是 $\partial_1$ 的外法线. 我们还可设 $x_1<x_2<\cdots<x_l$, 这里 $x_j=\mathrm{Re}(\lambda_j)(1\leqslant j\leqslant l)$. 这样一来, 由引理 5.4.1, 对任意小的正数 $\varepsilon$, 我们有

$$n(Y,\pi/2,\varepsilon;f-a)=\frac{x_l-x_1}{2\pi}Y+O(1),\quad \text{当}\ \ Y\to+\infty\text{时}. \tag{7.4.20}$$

现置

$$F(z)=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}y_0 z}\{P_l(z)[f'(z)-a]-[P_l'(z)+\lambda_l P_l(z)][f(z)-a]\}. \tag{7.4.21}$$

则由此及 (7.4.18), (7.4.19) 可知,

$$\begin{aligned}F(z)&=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}y_0 z}\left[\sum_{j=1}^{l-1}Q_j(z)\mathrm{e}^{\lambda_j z}+\sum_{j=l+1}^{s}Q_j(z)\mathrm{e}^{\lambda_j z}-aP_l(z)\right]\\&=\sum_{j=1}^{l-1}Q_j(z)\mathrm{e}^{x_j z}+\sum_{j=l+1}^{s}Q_j(z)\mathrm{e}^{(\lambda_j-\mathrm{i}y_0)z}-aP_l(z)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}y_0 z},\end{aligned} \tag{7.4.22}$$

这里 $Q_j(z)=P_l(z)[P_j'(z)+\lambda_j P_j(z)]-P_j(z)[P_l'(z)+\lambda_l P_l(z)]$ $(j\neq l)$ 是多项式. 显然有 $Q_j(z)\not\equiv 0$ $(j\neq l)$.

于是由引理 5.4.1 并仍用那里的符号, 当 $y_0<0$ 时, 有

$$n(Y,\pi/2,\varepsilon;F)=\frac{x_{l-1}-x_1}{2\pi}Y+O(1),\quad \text{当}\ \ Y\to+\infty\ \text{时}; \tag{7.4.23}$$

而当 $y_0>0$ 时, 有

$$n(Y,\pi/2,\varepsilon;F)=O(1),\quad \text{当}\ \ Y\to+\infty\ \text{时}. \tag{7.4.24}$$

由 (7.4.21) 和条件 $f(z)=a \Longrightarrow f'(z)=a$ 可知 $f(z)-a$ 的每个零点都是单重零点, 并且有 $f(z)=a \Longrightarrow F(z)=0$. 于是有

$$n(Y,\pi/2,\varepsilon;f-a)\leqslant n(Y,\pi/2,\varepsilon;F).$$

由此及 (7.4.20), (7.4.23) 和 (7.4.24) 即得矛盾: $x_l \leqslant x_{l-1}$.

**情形 1.2** 所有 $\lambda_j(1\leqslant j\leqslant s)$ 都在一条通过原点的直线上. 此时我们可设 $\lambda_j=r_j\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}(1\leqslant j\leqslant s)$, 这里 $r_j$ 和 $\theta$ 是实数. 由于 $\lambda_j$ $(1\leqslant j\leqslant s)$ 是方程 $z^k-z-c=0$ 的解, 所以 $r_j$ $(1\leqslant j\leqslant s)$ 也是下面两方程 $x^k\cos(k\theta)-x\cos\theta-c_1=0$ 和 $x^k\sin(k\theta)-x\sin\theta-c_2=0$ 的解, 这里 $c_1=\mathrm{Re}(c)$, $c_2=\mathrm{Im}(c)$. 于是由引理 7.4.2 有 $s\leqslant 3$. 从而必有 $s=3$. 再由引理 7.4.2, 我们就可设 $r_1<r_2<r_3$ 并且 $r_1<0<r_3$. 但此时, 用情形 1.1 中类似的讨论, 可得出 $r_3-r_1\leqslant r_3-\min\{0,r_2\}$, 这与 $r_1<\min\{0,r_2\}$ 矛盾.

**情形 2** $s=2$. 则由 (7.4.18) 和 (7.4.19) 得

$$f(z) = a+P_1(z)\mathrm{e}^{\lambda_1 z}+P_2(z)\mathrm{e}^{\lambda_2 z}, \tag{7.4.25}$$

$$f'(z) = [P_1'(z)+\lambda_1P_1(z)]\mathrm{e}^{\lambda_1 z}+[P_2'(z)+\lambda_2P_2(z)]\mathrm{e}^{\lambda_2 z}, \tag{7.4.26}$$

$$f''(z) = [2\lambda_1P_1'(z)+\lambda_1^2P_1(z)]\mathrm{e}^{\lambda_1 z}+[2\lambda_2P_2'(z)+\lambda_2^2P_2(z)]\mathrm{e}^{\lambda_2 z}. \tag{7.4.27}$$

若 $c\neq 0$, 则由 (7.4.17) 及 $f(z)=a \Longrightarrow f'(z)=a$ 和 $f'(z)=a \Longrightarrow f^{(k)}(z)=a$ 可知, $f(z)=a \Longleftrightarrow f'(z)=a$.

我们断言: $f'(z)-a$ 只有有限多个重级零点. 假设 $f'(z)-a$ 有无限多个重级零点, 设为 $z_n$. 则有 $f''(z_n)=0$, $f(z_n)=a$. 于是由 (7.4.25) 和 (7.4.27) 得

$$P_1(z_n)\mathrm{e}^{\lambda_1 z_n}+P_2(z_n)\mathrm{e}^{\lambda_2 z_n}=0,$$

$$[2\lambda_1P_1'(z_n)+\lambda_1^2P_1(z_n)]\mathrm{e}^{\lambda_1 z_n}+[2\lambda_2P_2'(z_n)+\lambda_2^2P_2(z_n)]\mathrm{e}^{\lambda_2 z_n}=0.$$

由此即得

$$P_1(z_n)[2\lambda_2P_2'(z_n)+\lambda_2^2P_2(z_n)]=P_2(z_n)[2\lambda_1P_1'(z_n)+\lambda_1^2P_1(z_n)].$$

从而有

$$P_1(z)[2\lambda_2P_2'(z)+\lambda_2^2P_2(z)]\equiv P_2(z)[2\lambda_1P_1'(z)+\lambda_1^2P_1(z)].$$

由此及 $\lambda_1\neq\lambda_2$ 就有 $\lambda_2=-\lambda_1$, 因此 $P_1(z), P_2(z)$ 为常数. 记 $\lambda_1=\lambda$, $P_j(z)=C_j(\neq 0)(j=1,2)$. 则 $\lambda\neq 0$, 并且由 (7.4.25) 得

$$f(z)-a=C_1\mathrm{e}^{\lambda z}+C_2\mathrm{e}^{-\lambda z}=C_1\mathrm{e}^{-\lambda z}\left(\mathrm{e}^{\lambda z}-K\right)\left(\mathrm{e}^{\lambda z}+K\right), \tag{7.4.28}$$

这里 $K$ 是常数, 满足 $K^2 = -C_2/C_1$. 于是有

$$f'(z) = C_1\lambda e^{\lambda z} - C_2\lambda e^{-\lambda z}. \tag{7.4.29}$$

从而由 (7.4.28), (7.4.29) 和 $f(z) = a \Longrightarrow f'(z) = a$ 可知,

$$C_1\lambda K - C_2\lambda/K = a = -C_1\lambda K + C_2\lambda/K.$$

由此即得 $a = 0$, 与 $a \neq 0$ 矛盾.

于是, $f'(z) - a$ 只有有限多个重级零点. 这样, 由 $f(z) = a \Longleftrightarrow f'(z) = a$, 并由 $f$ 的级不超过 1 可知, 存在多项式 $P(\not\equiv 0)$ 和常数 $\alpha$ 使得

$$\frac{f'(z) - a}{f(z) - a} = P(z)e^{\alpha z}. \tag{7.4.30}$$

由此及 (7.4.25) 即得

$$(P_1' + \lambda_1 P_1)e^{\lambda_1 z} + (P_2' + \lambda_2 P_2)e^{\lambda_2 z} - a = PP_1 e^{(\alpha+\lambda_1)z} + PP_2 e^{(\alpha+\lambda_2)z}.$$

但这是不可能的.

于是 $c = 0$, 从而 $\lambda_j (j = 1, 2)$ 是方程 $z^k - z = 0$ 的两个单重根, 并且 $P_1(z)$ 和 $P_2(z)$ 是两个常数, 记为 $P_j(z) = C_j (j = 1, 2)$. 于是由 (7.4.25), (7.4.26) 得

$$f(z) - a = C_1 e^{\lambda_1 z} + C_2 e^{\lambda_2 z}, \quad f'(z) = \lambda_1 C_1 e^{\lambda_1 z} + \lambda_2 C_2 e^{\lambda_2 z}.$$

再注意到 $f(z) = a \implies f'(z) = a$, 我们就有

$$e^{(\lambda_1 - \lambda_2)z} = -\frac{C_2}{C_1} \Longrightarrow e^{\lambda_1 z} = \frac{a}{(\lambda_1 - \lambda_2)C_1}.$$

于是由引理 7.4.3, 存在整数 $n$ 使得

$$\lambda_1 = n(\lambda_1 - \lambda_2). \tag{7.4.31}$$

若 $\lambda_1 \cdot \lambda_2 \neq 0$, 则由 $\lambda_1^k = \lambda_1$ 和 $\lambda_2^k = \lambda_2$ 可知有 $\lambda_1^{k-1} = \lambda_2^{k-1} (= 1)$. 于是再由 (7.4.31), 我们就得矛盾: $n^{k-1} = (n-1)^{k-1}$. 于是 $\lambda_1$ 和 $\lambda_2$ 至少有一为零. 记 $\lambda_1 = 0$. 则有 $f(z) = a + C_1 + C_2 e^{\lambda_2 z}$, $f'(z) = \lambda_2 C_2 e^{\lambda_2 z}$. 利用 $f(z) = a \implies f'(z) = a$ 可知, $C_1 = -a/\lambda_2$. 从而

$$f(z) = \frac{\lambda - 1}{\lambda} a + Ce^{\lambda z},$$

这里 $C, \lambda (= \lambda_2)$ 是常数, 满足 $\lambda^{k-1} = 1$.

**情形 3**  $s=1$. 则有

$$f(z)-a=P(z)e^{\lambda z},\quad f'(z)=[P'(z)+\lambda P(z)]e^{\lambda z},$$

这里 $P(z)\not\equiv 0$ 是多项式, $\lambda$ 是方程 $z^k-z-c=0$ 的一根.

若 $c\neq 0$, 则 $\lambda\neq 0$. 于是由 (7.4.17) 和定理的条件可知, $f(z)=a\Longleftrightarrow f'(z)=a$. 但在此种情形下, $f(z)=a$ 只有有限个解, 而 $f'(z)=a$ 有无限个解, 矛盾.

若 $c=0$. 若 $\lambda=0$, 则由 $f(z)=a\Longrightarrow f'(z)=a$ 可知, $P(z)=0\Longrightarrow P'(z)=a$. 由此即得 $P'(z)\equiv a$, 从而 $f(z)=az+A$, 这里 $A$ 是常数. 但这与 $f'(z)=a\Longrightarrow f^{(k)}(z)=a$ 矛盾.

于是有 $\lambda\neq 0$. 从而 $\lambda$ 是方程 $z^k-z=0$ 的单重根, 于是满足 $\lambda^{k-1}=1$, 并且 $P(z)$ 是常数, 记为 $P(z)=C$. 从而我们得到

$$f(z)=Ce^{\lambda z}+a.$$

这就完成了定理 7.4.2 的证明.

与本节有关的结果可参看文献 [41], [77], [119]. □

**问题 7.2** 用亚纯函数的正规族理论研究涉及函数及其导函数的亚纯函数的唯一性, 可得到与前面整函数类似的结果.

# 第 8 章　亚纯函数的拟正规族

前面几章讨论了亚纯函数的正规族理论, 并且建立了一系列的判别定理. 本章将研究和讨论亚纯函数的拟正规的概念和性质.

## 8.1 基本概念

**定义 8.1.1**　*设 $\mathcal{F}$ 为区域 $D$ 内的一个亚纯函数族. 如果对于 $\mathcal{F}$ 的任一序列 $\{f_n\}$, 都存在 $\{f_n\}$ 的子序列 $\{f_{n_k}\}$, 以及 $D$ 中的点集 $E$ (在 $D$ 内无聚点), 使得 $\{f_{n_k}\}$ 在 $D\backslash E$ 上按球距内闭一致收敛, 则称 $\mathcal{F}$ 为区域 $D$ 内的一个拟正规族, 简称 $\mathcal{F}$ 在 $D$ 内拟正规.*

这里的集合 $E$ 和子列 $\{f_{n_k}\}$ 有关.

**定义 8.1.2**　*设 $\mathcal{F}$ 为区域 $D$ 内的一个亚纯函数族, $\nu$ 是一个非负整数. 如果对于 $\mathcal{F}$ 的任一序列 $\{f_n\}$, 都存在 $\{f_n\}$ 的子序列 $\{f_{n_k}\}$, 以及 $D$ 中的点集 $E$, $|E| \leqslant \nu$, 使得 $\{f_{n_k}\}$ 在 $D\backslash E$ 上按球距内闭一致收敛, 则称 $\mathcal{F}$ 为区域 $D$ 内的一个 $\nu$ 阶拟正规族.*

**定义 8.1.3**　*设 $\mathcal{F}$ 为区域 $D$ 内的一个亚纯函数族, $z_0 \in D$. 如果存在正数 $\delta$, 使得 $\mathcal{F}$ 是 $\Delta(z_0, \delta)$ 内的一个拟正规族, 则称 $\mathcal{F}$ 在点 $z_0$ 拟正规.*

由有限覆盖定理和对角线法, 不难推出:

**定理 8.1.1**　*设 $\mathcal{F}$ 为区域 $D$ 内的一个亚纯函数族, 那么 $\mathcal{F}$ 在 $D$ 内拟正规的充要条件是: $\mathcal{F}$ 在区域 $D$ 内的每一点都拟正规.*

从正规族与拟正规族的定义中可以看出, 拟正规族的概念是正规族的概念的推广. 特别当 $\mathcal{F}$ 是区域 $D$ 内的 0 阶拟正规族时,$\mathcal{F}$ 也就是正规族.

**例 8.1**　函数列 $\{\mathrm{e}^{nz}\}$ 在单位圆盘内不是拟正规族. 这是因为它的任何子列在虚轴与单位圆盘的交集内不正规.

**例 8.2**　函数族 $\mathcal{F} = \{\dfrac{(z-a)^2}{z-b} : a, b \in \mathbb{C}\}$ 在单位圆盘内是 1 阶拟正规族, 但是该函数族在单位圆盘内的每一点都不正规.

**例 8.3**　函数列 $\{n(z^{n!} - 2^{n!})\}$ 在区域 $1 < |z| < 3$ 内不是拟正规的, 这是因为它的任何子列在圆周 $|z| = 2$ 上的每一点都不正规. 应当注意: 它的导函数列在该区域内却是正规的.

区域 $D$ 内的亚纯函数族 $\mathcal{F}$ 若不是 $\nu$ 阶拟正规族, 那么存在 $z_1, z_2, \cdots, z_{\nu+1} \in D$

以及序列 $\{f_n\} \subset \mathcal{F}$, 使得 $\{f_n\}$ 的任何子列在 $z_1, z_2, \cdots, z_{\nu+1}$ 上的每一点都不正规. 换句话说, 对于任意的 $\delta > 0$,

$$M_j := \sup_{z \in \Delta(z_j, \delta)} f_n^{\#}(z) \to \infty, \quad j = 1, 2, \cdots, \nu+1, \quad n \to \infty.$$

**定理 8.1.2** 设 $\mathcal{F}$ 为区域 $D$ 内的拟正规族, $a, b \in \bar{c}, a \neq b$ 任给 $f \in \mathcal{F}$, $f \neq a$, $b$, 那么 $\mathcal{F}$ 在 $D$ 内正规.

**证明** 不妨设 $a = 0, b = \infty$. 只要证明: 若 $\{f_n\}$ $(\subset \mathcal{F})$ 在 $z_0$ $(\in D)$ 的某个去心邻域内正规, 那么 $\{f_n\}$ 在 $z_0$ 拟正规. 不妨设 $\{f_n\}$ 在 $0 < |z - z_0| < \delta$ 内正规, 并且 $\{f_n\}$ 的任何子列在点 $z_0$ 不正规. 因为 $\{f_n\}$ 在 $|z - z_0| < \delta$ 内解析, 所以 $\{f_n\}$ 在 $0 < |z - z_0| < \delta$ 上内闭一致收敛于 $\infty$. 因为 $\left\{\dfrac{1}{f_n}\right\}$ 也是解析函数列, 所以同理可得 $\left\{\dfrac{1}{f_n}\right\}$ 在 $0 < |z - z_0| < \delta$ 上内闭一致收敛于 $\infty$, 从而得到矛盾. □

## 8.2 拟正规定则

首先介绍一些相关的引理.

**引理 8.2.1** 设 $\{a_k\}$ 是单位圆盘 $\Delta$ 上的一个互不相同的点列, 在 $\Delta$ 内无聚点, $\{f_n\}$ 是单位圆盘内一亚纯函数列. 每一个 $f_n$ 的零点均是重级的, $f_n' \neq 1$. 并且假设

(a) $\{f_n\}$ 的每一个子列在点 $a_1$ 不正规;

(b) 存在 $\delta > 0$, 使得 $f_n$ 在 $\Delta(a_1, \delta)$ 有一个 (重级) 零点;

(c) $\{f_n\}$ 在 $\Delta \backslash \{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ 上内闭一致收敛于 $f$;

那么我们有

(1) 存在 $\eta_0 > 0$, 使得对每一 $\eta$, $0 < \eta < \eta_0$, 当 $n$ 充分大时, $f_n$ 在 $\Delta(a_1, \eta)$ 仅有一个极点, 并且这个极点是单级的;

(2) $f(z) = z - a$.

**证明** 只需证明: 对每一个 $\{f_n\}$ 的子列, 都存在子列满足 (1) 和 (2). 取定 $\{f_n\}$ 的一个子列, 为了书写方便, 仍记为 $\{f_n\}$.

因为 $\{f_n\}$ 在 $z = a_1$ 不正规, 由引理 3.1.3, 存在 $\{f_n\}$ 的子列, 不妨设为 $\{f_n\}$ 本身, 以及点列 $z_n \to a_1$ 和正数列 $\rho_n \to 0^+$ 使得

$$g_n(\xi) = \frac{f_n(z_n + \rho_n \xi)}{\rho_n}$$

在复平面 $\mathbb{C}$ 上按球距内闭一致收敛于一个非常数的, 有穷级的亚纯函数 $g(\xi)$. 因为 $f_n$ 的零点均为重级零点, 所以 $g$ 的零点也均为重级零点. 又

$$g_n'(\xi) = f_n'(z_n + \rho_n \xi)$$

以及 $f_n'(z_n+\rho_n\xi)\neq 1$, 所以由 Hurwitz 定理, $g'\neq 1$ 或 $g'\equiv 1$. 由 $g'\equiv 1$ 可得 $g(\xi)=\xi+c$, 这与 $g(\xi)$ 的零点均是重级的相矛盾. 所以假设在复平面上

$$g'(\xi)\neq 1.$$

从而文献 [189] 可推得

$$g(\xi)=\frac{(\xi-a)^2}{\xi-b},$$

其中 $a$, $b$ 为互相判别的有穷复数. 由辐角原理, 存在序列 $\xi_n\to a$ 和 $\eta_n\to b$ 使得, 当 $n$ 充分大时, $g(\xi_n)=0$, $g(\eta_n)=\infty$. 记

$$z_{n,0}=z_n+\rho_n\xi_n,\quad z_{n,1}=z_n+\rho_n\eta_n,$$

从而有

$$z_{n,j}\to a_1\quad (j=0,1),\quad f_n(z_{n,0})=0,\quad f_n(z_{n,1})=\infty.$$

先假设结论 (1) 已经成立, 我们来证 (2) 也成立.

因为极限函数 $f$ 在 $\Delta\backslash\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ 亚纯或者恒为 $\infty$. 首先假定 $f$ 是一个亚纯函数. 那么由极点的孤立性, 存在 $\delta_0>0$ 使得 $f$ 在 $\Gamma=\{z:|z-a_1|=\delta_0\}$ 上无极点, 由此 $f_n'$ 在 $\Gamma$ 上一致收敛于 $f'$.

我们证明 $f'\equiv 1$ 在 $\Delta'(a_1,\delta_0)$ 上成立.

事实上, 若不然, 根据 Hurwitz 定理, $f'\neq 1$. 因为 $1/(f_n'-1)$ 在 $\Delta(a_1,\delta_0)$ 上解析, 并且在 $\Gamma$ 上一致收敛于 $1/(f'-1)$. 由最大模原理, $1/(f_n'-1)$ 在 $\Delta(a_1,\delta_0)$ 上一致收敛, 所以 $\{f_n'\}$ 在点 $a_1$ 正规. 因为 $f_n'(z_{n,0})=0$ 以及 $f_n'(z_{n,1})=\infty$ 以及 $z_{n,j}\to a_1$ $(j=0,1)$, 这就说明 $\{f_n'\}$ 在点 $a_1$ 不等度连续 (按球面距离), 矛盾.

因为 $\{f_n'\}$ 在 $\Delta'(a_1,\delta_0)$ 上一致收敛于 1. 所以对 $z$, $z_0\in\Delta'(a_1,\delta_0)$, $f(z_0)\neq\infty$, 可得

$$f_n(z)-f_n(z_0)=\int_{z_0}^{z}f_n'(\xi)\mathrm{d}\xi\to z-z_0.$$

不妨假设 $f_n(z_0)-z_0\to\alpha$.

现在证明 $\alpha=-a_1$.

否则取 $r<\min\{|\alpha+a_1|,\delta_0\}$, 对充分大的 $n$, 有

$$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{|z-a_1|=r}\frac{f_n'(z)}{f_n(z)}\mathrm{d}z\to\int_{|z-a_1|=r}\frac{\mathrm{d}z}{z-a_1+(f(z_0)-z_0)+a_1}=0\tag{8.2.1}$$

然而, 由辐角原理, 等式的左边表示 $f_n$ 在 $\Delta(a_1,r)$ 内的零点和极点的个数之差, 从而

$$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{|z-a_1|=r}\frac{f_n'(z)}{f_n(z)}\mathrm{d}z\geqslant 2-1,$$

这与 (8.2.1) 式矛盾. 这就得到 $\alpha=-a_1$, 即 $f(z)=z-a_1$.

现在假定 $f\equiv\infty$, $z\in\Delta\backslash\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$. 设

$$F_n(z)=f_n(z)\frac{(z-z_{n,1})}{(z-z_{n,0})^2},$$

由 (b) 得知: $F_n$ 在 $\Delta(a_1,\delta)$ 上不取零, 对解析函数 $\{1/F_n\}$ 用最大模原理, 得到 $F_n$ 在 $\Delta(a_1,\delta)$ 上一致收敛于 $\infty$. 因为

$$\begin{aligned}\frac{f_n(z_n+\rho_n\xi)}{\rho_n}&=\frac{F_n(z_n+\rho_n\xi)}{\rho_n}\frac{(\rho_n\xi+z_n-z_{n,0})^2}{(\rho_n\xi+z_n-z_{n,1})}\\&=F_n(z_n+\rho_n\xi)\frac{(\xi-\xi_n)^2}{(\xi-\eta_n)}\end{aligned}$$

这样就得到 $F_n(z_n+\rho_n\xi)\to 1$, 这与 $F_n$ 在 $a_1$ 附近一致趋向于 $\infty$ 矛盾.

我们已经证明了: 若 (1) 成立, (2) 必定成立. 现在回过来证明 (1) 成立.

不妨假定在 $a_1$ 的任何邻域内, $f_n$ ($n$ 充分大) 至少有两个不同的极点. 设 $z_{n,2}$ 是 $f_n$ 的另外一个极点, 并且 $f_n$ 在 $\Delta'(z_{n,1},|z_{n,1}-z_{n,2}|)$ 内无极点. 设 $z_{n,2}=z_n+\rho_n\eta_n^*$, 那么 $z_{n,2}\to a_1$, 但 $\eta_n^*\to\infty$. 令

$$G_n(\zeta)=\frac{f_n(z_{n,1}+(z_{n,2}-z_{n,1})\zeta)}{z_{n,2}-z_{n,1}}.$$

因为 $z_{n,2}-z_{n,1}\to 0$, 所以对任意有界集合 $D^*$, 当 $n$ 充分大时, $G_n$ 在 $D^*$ 上有定义, 并且 $G_n'(\xi)\neq 1$. 因为

$$G_n(0)=\infty,\quad G_n\left(\frac{z_{n,0}-z_{n,1}}{z_{n,2}-z_{n,1}}\right)=0$$

以及

$$\frac{z_{n,0}-z_{n,1}}{z_{n,2}-z_{n,1}}=\frac{\xi_n-\eta_n}{\eta_n^*-\eta_n}\to 0,$$

所以 $\{G_n\}$ 在点 $\zeta=0$ 不正规.

另一方面, 对复平面上的任意紧集, 当 $n$ 充分大时, $G_n$ 仅有一个 (重级) 零点, 它们的极限点为 0. 因为 $G_n'(\zeta)\neq 1$, 所以由定理 2.3.1 得, $\{G_n\}$ 在 $\mathbb{C}\backslash\{0\}$ 上内闭一致收敛于 $G$. 因为 $G_n$ 在单位圆盘 $\Delta$ 上仅有一个极点, 由此对 $\{G_n\}$ 而言, 如果条件 (a), (b), (c) 均被满足, 从而得到,

$$G(\zeta)=\zeta,$$

这与 $G(1)=\infty$ 矛盾.

这样, 引理 8.2.1 证完. □

为了更好地描述下面的引理, 首先引进一个概念.

**定义 8.2.1** 设 $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, $\widetilde{z} = (z_1 + z_2)/2$. 如果

(1) $f(z_1) = f(z_2) = 0$;

(2) 存在 $z_3$, 使得 $|z_3 - \widetilde{z}| < |z_1 - z_2|$ 以及 $|f'(z_3)| > 1$, 那么称 $(z_1, z_2)$ 是函数 $f(z)$ 的一个非平凡的零点对.

**注** 条件 (2) 等价于

(2') 存在 $z^*$, $|z^*| < 1$ 使得 $|h'(z^*)| > 1$, 其中

$$h(z) = \frac{f(\widetilde{z} + (z_1 - z_2)z)}{z_1 - z_2}.$$

因为 $|h'(z)| \geqslant |h^{\#}(z)|$, 所以如果有 $h^{\#}(z^*) > 1$, 自然就保证了 (2') 的条件.

下面讨论 $\{f_n\}$ 在某个不正规点的任何邻域内至少有两个零点 ( $n$ 充分大) 的情形.

**引理 8.2.2** 设 $\{f_n\}$ 是单位圆盘 $\Delta$ 内的一个亚纯函数列, $f_n$ 的零点均为重级, $f'_n(z) \neq 1$, $n = 1, 2, \cdots$, $z \in \Delta$. 并假设

(a) $\{f_n\}$ 的任何一个子列在 $z_0 \in \Delta$ 不正规;

(b) 对任何 $\delta > 0$, $f_n$ 在 $\Delta(z_0, \delta)$ 上至少有两个不同的零点 ($n$ 充分大). 则对每一个 $\delta > 0$, $f_n$ 在 $\Delta(z_0, \delta)$ 上有非平凡的零点对 $(a_n, c_n)$, 并且

$$\left\{\frac{f_n(d_n + (a_n - c_n)\zeta)}{a_n - c_n}\right\}$$

在 $\Delta$ 上不正规, 其中 $d_n = (a_n + c_n)/2$.

**证明** 由引理 3.1.3, 存在 $\{f_n\}$ 的子列 (仍记为 $\{f_n\}$ ), 点 $z_n \to z_0$, 正数列 $\rho_n \to 0^+$ 以及 $a, b \in \mathbb{C}$, 使得

$$g_n(\zeta) = \frac{f_n(z_n + \rho_n\zeta)}{\rho_n} \Longrightarrow g(\zeta) = \frac{(\zeta - a)^2}{\zeta - b} \tag{8.2.2}$$

在 $\mathbb{C}$ 上按球距内闭一致成立. 由 Hurwitz 定理, 存在 $\zeta_n \to a$, $\eta_n \to b$, 使得 $a_n = z_n + \rho_n\zeta_n \to z_0$, $b_n = z_n + \rho_n\eta_n \to z_0$, 当 $n$ 充分大时, $g_n(\zeta_n) = f_n(a_n) = 0$, $g_n(\eta_n) = f_n(b_n) = \infty$.

根据假设, 当 $n$ 充分大时, 存在 $c_n \neq a_n$, $c_n \to z_0$ 使得 $f_n(c_n) = 0$. 设 $c_n = z_n + \rho_n\zeta_n^*$, 由 (8.2.2) 式得 $\zeta_n^* \to \infty$. 置 $d_n = (a_n + c_n)/2$, 可知函数

$$h_n(\zeta) = \frac{f_n(d_n + (a_n - c_n)\zeta)}{a_n - c_n}$$

对于任意一个紧集 $E \subset \mathbb{C}$, 当 $n$ 充分大时均有定义.

我们断言 $\{h_n\}$ 的任何子列在 $\zeta = 1/2$ 处不正规. 事实上, 因为

$$\frac{a_n - d_n}{a_n - c_n} \to \frac{1}{2}, \quad \frac{b_n - d_n}{a_n - c_n} \to \frac{1}{2},$$

$$h_n(\frac{a_n - d_n}{a_n - c_n}) = f_n(a_n) = 0, \quad h_n(\frac{b_n - d_n}{a_n - c_n}) = f_n(b_n) = \infty,$$

所以 $\{h_n\}$ 的任何子列在点 $\zeta = 1/2$ 的任何邻域内的不正规性就呈现出来了. 由 Marty 正规定则, 当 $n$ 充分大时

$$\sup_{|\zeta - 1/2| \leqslant 1/4} h_n^{\#}(\zeta) > 1.$$

这就证明了 $(a_n, c_n)$ 确实为 $f_n$ 的非平凡的零点对. □

**引理 8.2.3** 设 $\{f_n\}$ 为单位圆盘 $\Delta$ 内的一个亚纯函数列, 所有的零点都是重级的, 并且 $f'_n(z) \neq 1$, $n = 1, 2, \cdots$, $z \in \Delta$. 假设

(a) 存在点 $d \in \Delta$, $a_n \to d$, $c_n \to d$ 以及 $z_0 \in \mathbb{C}$, 使得对每一正数 $\delta$, 当 $n$ 充分大时,

$$h_n(z) = \frac{f_n(d_n + (a_n - c_n)z)}{a_n - c_n}$$

在 $\Delta(z_0, \delta)$ 上至少有两个不同零点, 其中 $d_n = (a_n + c_n)/2$,

(b) $\{h_n\}$ 的任何子列在 $z_0$ 不正规. 则当 $n$ 充分大时, $f_n$ 有一个非平凡的零点对 $(z^*_{n,1}, z^*_{n,2})$, 使得 $z^*_{n,j} \to d$ $(j = 1, 2)$ 以及

$$|z^*_{n,1} - z^*_{n,2}| < |a_n - c_n|.$$

**证明** 因为 $\{f_n\}$ 的任何子列在点 $z = z_0$ 不正规, 那么由引理 3.1.3 存在 $\{h_n\}$ 的一个子列 (仍记为 $\{h_n\}$ ), 点 $z_n \to z_0$ 以及正数列 $\rho_n \to 0^+$, 使得

$$g_n(\zeta) = \frac{h_n(z_n + \rho_n \zeta)}{\rho_n}$$

在 $\mathbb{C}$ 上按球距内闭一致收敛于 $(\zeta - a)^2/(\zeta - b)$. 由 Hurwitz 定理, 存在 $\xi_{n,0} \to b$, $\xi_{n,1} \to a$ 使得 $g_n(\xi_{n,0}) = h_n(z_{n,0}) = \infty$, $g_n(\xi_{n,1}) = h_n(z_{n,1}) = 0$, 其中

$$z_{n,j} = z_n + \rho_n \xi_{n,j} \to z_0, \quad (j = 0, 1).$$

由条件 (a), 存在 $z_{n,2} \to z_0$, $z_{n,2} \neq z_{n,1}$, $h_n(z_{n,2}) = 0$. 设 $z_{n,2} = z_n + \rho_n \xi_{n,2}$, 那么 $\xi_{n,2} \to \infty$.

令

$$z^*_{n,j} = d_n + (a_n - c_n) + \rho_n(a_n - c_n)\xi_{n,j}, \quad j = 1, 2.$$

显然有 $z_{n,j}^* \to d$, $j = 0, 1, 2$. 定义

$$G_n(\zeta) = \frac{f_n(\dfrac{z_{n,1}^* + z_{n,2}^*}{2} + (z_{n,1}^* - z_{n,2}^*)\zeta)}{z_{n,1}^* - z_{n,2}^*},$$

则 $\{G_n\}$ 的任何子列在 $\zeta = 1/2$ 不正规. 事实上

$$G_n\Big(\frac{2\xi_{n,0} - \xi_{n,1} - \xi_{n,2}}{2(\xi_{n,1} - \xi_{n,2})}\Big) = \infty, \quad G_n(\frac{1}{2}) = 0.$$

又因为

$$\frac{2\xi_{n,0} - \xi_{n,1} - \xi_{n,2}}{2(\xi_{n,1} - \xi_{n,2})} \to \frac{1}{2},$$

所以 $\{G_n\}$ 的任何子列在 $\zeta = 1/2$ 不等度连续 (按球面距离). 由 Marty 正规定则可得 $(z_{n,1}^*, z_{n,2}^*)$ 是 $f_n$ 的一个非平凡的零点对 ( $n$ 充分大). 由于

$$|z_{n,1}^* - z_{n,2}^*| = |a_n - c_n||z_{n,1} - z_{n,2}|$$

以及 $z_{n,j} \to z_0$ $(j = 1, 2)$, 所以当 $n$ 充分大时,

$$|z_{n,1}^* - z_{n,2}^*| < |a_n - c_n|.$$

引理 8.2.3 得证. □

**引理 8.2.4** 设 $\{f_n\}$ 为单位圆盘 $\Delta$ 内的一列亚纯函数, 所有的零点都是重级的, 并且 $f_n'(z) \neq 1$, $n = 1, 2, \cdots$, $z \in \Delta$. 假设

(a) $\{f_n\}$ 在 $\Delta'(0, 1)$ 内正规, 但是它的任何子列在点 $z = 0$ 不正规;

(b) 存在 $\delta > 0$, 使得 $f_n$ 在 $\Delta(a_1, \delta)$ 内有一个 (重级) 零点.

则存在 $\{f_n\}$ 的一个子列 (为简单起见, 仍记为 $\{f_n\}$), 使得对于任意 $a \in \mathbb{C}$, $f_n - a$ 在 $\Delta'(0, 1/2)$ 内至多只有两个零点.

**证明** 不失一般性, 可设 $\{f_n\}$ 在 $\Delta'(0, 1)$ 上一致收敛于 $f$. 由引理 6.1.1, $f(z) = z$.

先假定 $|a| \leqslant 2/3$, 并记 $\Gamma$ 为圆周 $\{|z| = 3/4\}$. 那么

$$\frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_\Gamma \frac{f_n'(z)}{f_n(z) - a} \mathrm{d}z \to \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_\Gamma \frac{1}{z - a} \mathrm{d}z = 1.$$

然而上式的左边是 $f_n$ 的 $a-$ 值点与 $f_n$ 的极点的个数之差 (计重数), 并且由引理 6.1.1, 存在 $0 < \delta < 3/4$ 使得当 $n$ 充分大时, $f_n$ 在 $\Delta(0, \delta)$ 上仅有一个简单极点以及 $\{f_n\}$ 在 $\Delta'(0, 1)$ 上一致收敛于 $z$, 因此当 $n$ 充分大时 $f_n$ 在 $\Gamma$ 的 $a-$ 值点个数恰好为 2.

再假定 $|a| > 2/3$, 记 $\Gamma'$ 为圆周 $\{|z| = 5/9\}$. 那么

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{f_n'(z)}{f_n(z)-a}dz \to \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma'}\frac{1}{z-a}dz = 0.$$

根据前面的分析不难得到：当 $n$ 充分大时,$f_n$ 在 $\Gamma'$ 内部的 $a-$ 值点个数为 1(计重数). 这就证明了引理. □

**引理 8.2.5** 设 $f$ 为复平面 $\mathbb{C}$ 上的一个亚纯函数, 所有的零点均为重级, 并且 $f'(z) \neq 1$, $z \in \mathbb{C}$, 则或者 $f$ 是有理函数, 或者存在 $f(z)$ 的一列零点对 $(a_n, c_n)$ 满足

(1) $|a_n - c_n| \to 0$;

(2)

$$h_n(\zeta) = \frac{f(d_n + (a_n - c_n)\zeta)}{a_n - c_n}$$

在 $\Delta$ 内不正规, 其中 $d_n = (a_n - c_n)/2$.

**证明** 若 $f$ 不是有理函数, 由定理 3.4, $f$ 必定是无穷级的. 可以断言：存在 $z_n \to \infty$, $\varepsilon_n \to 0^+$, 使得

$$S(\Delta(z_n, \varepsilon_n), f) = \frac{1}{\pi}\iint\limits_{|z-z_n|\leqslant\varepsilon_n}[f^{\#}(z)]^2 dxdy \to +\infty. \tag{8.2.3}$$

否则, 存在正数 $\varepsilon$, $M$, 使得对任意的 $\zeta \in \mathbb{C}$,

$$S(\Delta(\zeta, \varepsilon), f) \leqslant M.$$

从而

$$S(r, f) = \frac{1}{\pi}\iint\limits_{|z|\leqslant r}[f^{\#}(z)]^2 dxdy = O(r^2),$$

这样可推得 $f$ 的级至多是 2, 矛盾.

由 (8.2.3) 式可推得：存在 $z_n^* \in \Delta(z_n, \varepsilon_n)$, 使得 $f^{\#}(z_n^*) \to \infty$. 设 $f_n(z) = f(z + z_n)$, 那么 $\{f_n(z)\}$ 的任意子列在 $z = 0$ 不正规.

假设存在正数 $\delta > 0$, 使得 $f_n$ 在 $\Delta(0, \delta)$ 内仅有一个 (重级) 零点 $\xi_n$.

由引理 8.2.4, 存在 $\{f_{n_k}\} \subset \{f_n\}$, 使得对任意的 $a \in \mathbb{C}$, $f_{n_k} - a$ 在 $\Delta\left(a, \dfrac{\delta}{2}\right)$ 上至多只有两个零点 (计重数). 这样, 对充分大的 $k$,

$$S(\Delta(z_{n_k}, \varepsilon_{n_k}), f) \leqslant S(\Delta(0, \delta/2), f_k) \leqslant 2,$$

这与 (8.2.3) 式矛盾.

**定理 8.2.1** 设 $\mathcal{F}$ 是区域 $D$ 内的一族拟正规的亚纯函数, 如果任给 $f \in \mathcal{F}$, $f'(z) \neq 1$, 并且 $f$ 的零点均是重级的. 那么 $\mathcal{F}$ 的拟正规的阶是 1.

**证明**　假设定理不成立, 那么存在 $\{a_k^*\}\subset D$, $\{a_k^*\}$ 在 $D$ 内无聚点, 以及 $\{f_n\}\subset\mathcal{F}$, 使得 $\{f_n\}$ 的任意子列在 $a_1^*$, $a_2^*$ 不正规, 但是 $\{f_n\}$ 在 $D\backslash\{a_n^*\}$ 内正规. 不妨设 $\{f_n\}$ 在 $D\backslash\{a_k^*\}$ 上内闭一致收敛于 $f$.

为简单起见, 设 $D=\Delta$, $a_1^*=0$. 由引理 8.2.1 的证明可知 $f_n'$ 在 $\Delta\backslash\{a_k^*\}$ 上内闭一致收敛于 1.

首先假设对任意的 $\delta>0$, 当 $n$ 充分大时, $f_n$ 在 $\Delta(0,\delta)$ 上至少有两个不同的零点. 由引理 8.2.2, 当 $n$ 充分大时, $f_n$ 在 $\Delta(0,\delta)$ 内有非平凡的零点对. 所以存在 $\{f_n\}$ 的子列 (仍记为 $\{f_n\}$) 有一个零点对 $(z_n,w_n)$, 它们满足 $|z_n|<1/n$, $|w_n|<1/n$. 存在 $\delta_0>0$, $1<\rho<2$, 使得 $\{f_n\}$ 在 $\Delta'(0,2\delta_0)$ 上内闭一致收敛于 $f$, 并且在 $\delta_0\leqslant|z|\leqslant\rho\delta_0$ 上 $f\neq0$. 当 $n$ 充分大时, 设 $(a_n,c_n)$ 是 $f_n$ 在 $\Delta(0,\delta_0)$ 内距离最短的零点对, 从而有 $a_n-c_n\to0$. 令 $d_n=(a_n+c_n)/2$, 那么 $d_n\in\Delta(0,\delta_0)$. 不失一般性, 设 $d_n\to a$, 则 $|a|\leqslant\delta_0$. 因为 $f_n$ 和 $f$ 在 $\delta_0\leqslant|z|\leqslant\rho\delta_0$ 内无零点 ( $n$ 充分大), 那么 $(a_n,c_n)$ 是 $f$ 在 $\Delta(0,\rho\delta_0)$ 上距离最短的零点对.

置

$$h_n(\zeta)=\frac{f_n(d_n+(a_n-c_n)\zeta)}{a_n-c_n},$$

那么对任意 $\mathbb{C}$ 内的紧集, 当 $n$ 充分大时, $h_n(\zeta)$ 是有定义的. 显然 $h_n$ 的所有零点均为重级, $h_n'(\zeta)\neq1$. 我们断言: $\{h_n\}$ 的任何子列均在 $\mathbb{C}$ 上不正规. 否则可设 $\{h_n\}$ 在 $\mathbb{C}$ 上按球距内闭一致收敛于 $h$. 因为 $(a_n,c_n)$ 是 $f_n$ 的零点对, 那么

$$h_n(\pm\frac{1}{2})=h_n'(\pm\frac{1}{2})=0,\quad \sup_{\Delta}|h_n'(z)|>1,$$

从而得到 $h_n(\zeta)$ 不恒为常数, 因此 $h'(\zeta)\neq1$. 又 $h$ 的所有零点均是重级的, 那么由定理 3.4, $h$ 必定是级为无穷的超越函数. 由引理 8.2.3 , 存在 $h$ 的无限多个零点对 $(\xi_k,\eta_k)$, 点列 $\{z_k^*\}$, $\xi_k\to\infty$ 和 $\xi_k-\eta_k\to0$,

$$|z_k^*-\frac{\xi_k+\eta_k}{2}|<|\xi_k-\eta_k|,\quad h^{\#}(z_k^*)\to\infty.$$

固定 $k$, 使得 $h^{\#}(z_k^*)\geqslant2$, $|\xi_n-\eta_k|<1$. 那么存在 $\xi_{n,k}\to\xi_k$, $\eta_{n,k}\to\theta_k$, 当 $n$ 充分大时,

$$h_n(\xi_{n,k})=h_n(\eta_{n,k})=0$$

以及

$$|z_k^*-\frac{\xi_{n,k}+\eta_{n,k}}{2}|<|\xi_{n,k}-\eta_{n,k}|.$$

置

$$\xi_{n,k}^* = d_n + (a_n - c_n)\xi_{n,k};$$
$$\eta_{n,k}^* = d_n + (a_n - c_n)\eta_{n,k};$$
$$z_{n,k}^* = d_n + (a_n - c_n)z_{n,k},$$

那么有

$$\begin{aligned}\left|z_{n,k}^* - \frac{\xi_{n,k}^* + \eta_{n,k}^*}{2}\right| &= |a_n - c_n|\left|z_k^* - \frac{\xi_{n,k} + \eta_{n,k}}{2}\right| \\ &< |a_n - c_n||\xi_{n,k} - \eta_{n,k}| = |\xi_{n,k}^* - \eta_{n,k}^*|.\end{aligned}$$

由 $d_n \to a$, 那么可推得 $\xi_{n,k}^* \to a$, $\eta_{n,k}^* \to a$ 以及 $a < \rho\delta_0$, 又对充分大的 $n$,

$$|f_n'(z_{n,k}^*)| = |h_n(z_k^*)| \geqslant |h_n^{\#}(z_k^*)| > 1,$$

这样就得到 $(\xi_{n,k}^*, \eta_{n,k}^*)$ 是 $f_n$ 在 $\Delta(0, \rho\delta_0)$ 上的非平凡的零点对, 矛盾. 于是证明了 $\{h_n\}$ 的任何子列在复平面上不正规.

设 $E$ 为 $\{h_n\}$ 的不正规点集. 下面分两种情况进行讨论.

**情形 1** 对于任意 $\xi \in E$, 存在正数 $\delta$, 使得当 $n$ 充分大时, $h_n$ 在 $\Delta(\xi, \delta)$ 上仅有一个重级零点. 那么由定理 2.3.1 推得 $\{h_n\}$ 在 $E$ 中的每一点拟正规, 所以 $\{h_n\}$ 在 $D$ 上拟正规. 设 $\xi_0 \in E$ 以及 $\{h_n\}$ 的任何子列在点 $\xi_0$ 不正规, 那么由引理 8.2.1 得知, 存在 $E_0 \subset E$, 使得在 $\mathbb{C}\backslash E_0$ 的任何紧集上 $\{h_n\}$ 一致收敛于 $\xi - \xi_0$. 由对角线法, 可假设 $\{h_n\}$ 在 $E_0$ 的每一点都不正规. 我们断言

$$E_0 = \{\xi_0\}.$$

事实上, 若存在 $\xi_1 \in E$, $\xi_1 \neq \xi_0$, 那么由引理 8.2.2, 同样可得到 $h_n$一致收敛于 $\xi - \xi_1$, 这就得到矛盾. 又因为 $h_n\left(\pm\dfrac{1}{2}\right) = 0$, 由此得到情形 1 不会发生.

**情形 2** 存在 $\xi_0 \in E$ 使得对任意正数 $\delta > 0$, 存在 $\{f_n\}$ 的一个子列 (仍记为 $\{f_n\}$ ) 在 $\Delta(0, \delta)$ 内至少有两个零点. 由引理 8.2.2, 当 $n$ 充分大时, $\{f_n\}$ 有一非平凡的零点对 $(w_{n,1}^*, w_{n,2}^*)$ 使得

$$w_{n,j}^* \to a \quad (j = 1, 2)$$

以及

$$|w_{n,1}^* - w_{n,2}^*| < |a_n - c_n|.$$

这与 $(a_n, c_n)$ 是 $f_n$ 在 $\Delta(0, \rho\delta_0)$ 距离最短的零点对矛盾. 定理证毕. □

## 8.3 周期点与拟正规定则

**定义 8.3.1**　设 $D \subset \mathbb{C}$ 是一个区域, $f: D \to \mathbb{C}$ 上的全纯函数. 则对于任意的 $n \in N$ $(n \geqslant 2)$, 定义 $f$ 的 $n$ 次迭代为 $f^n: D_n \to \mathbb{C}$, 其中 $D_1 := D$, $f_1 := f, \cdots$, $D_n := f^{-1}(D_{n-1})$, $f^n = f^{n-1} \circ f$.

**注**　$D_2 = f^{-1}(D_1) \subset D = D_1$, 所以就有对于所有的 $n \in N$, $D_{n+1} \subset D_n \subset D$.

**定义 8.3.2**　点 $\xi \in D$ 称为 $f$ 的 $n$ 周期点, 如果有 $\xi \in D_n$, 且 $f^n(\xi) = \xi$, 但是 $f^m(\xi) \neq \xi$, 对于所有的 $1 \leqslant m \leqslant n-1$ 成立. 1 周期点又称为不动点.

Bregweiler[24] 证明了如下的几个定理, 将周期点与拟正规族联系了起来:

**定理 8.3.1**　令 $K > 1$, 设 $D$ 是复平面上的一个区域, $\mathcal{F}$ 是 $D$ 上的一族全纯函数, 如果存在 $n$, 对任意 $f \in \mathcal{F}$, 在 $f$ 的 $n$ 阶周期点 $\zeta$ 处, 有 $|(f^n)'(\zeta)| \leqslant K$, 那么 $\mathcal{F}$ 一阶拟正规族.

**定理 8.3.2**　设 $f$ 为超越整函数, $n \geqslant 2$, 则 $f$ 有一列 $n$ 阶周期点 $\{\zeta_k\}$, $(f^n)'(\zeta_k) \to \infty$.

**定理 8.3.3**　对于每个 $n \geqslant 2$, 存在 $K_n > 1$, 使得: 如果 $\mathcal{F}$ 是 $D$ 上的一族全纯函数, 对于每个 $f \in \mathcal{F}$, 在 $f^n$ 的不动点 $\zeta$ 处, $|(f^n)'(\zeta)| \leqslant K_n$, 则 $\mathcal{F}$ 在 $D$ 内正规.

**引理 8.3.1**[18]　设 $D$ 是复平面上的一个区域, $D_1, D_2, D_3$ 为闭包互不相交的若当域, $\mathcal{F}$ 是 $D$ 内的一族全纯函数, 若 $\mathcal{F}$ 不正规, 则存在 $f \in \mathcal{F}$, $f$ 在 $D_1, D_2$ 或 $D_3$ 上有一个单叶岛.

**引理 8.3.2**　$(f, U, V)$ 是 $d$ 级的类多项式映射, $D_1, D_2$ 为含于 $V$ 内闭包互不相交的若当域, 则 $U$ 内存在两个 $D_1$ 或 $D_2$ 上的单叶岛.

**证明**　令 $V_1, \cdots, V_m$ 为 $f^{-1}(D_2)$ 的连通分支, $W_1, \cdots, W_n$ 为 $f^{-1}(D_1)$ 的连通分支, $\mu_i$ 为 $f|_{V_i}: V_i \to D_2$ 的级, $\nu_j$ 为 $f|_{W_j}: W_j \to D_1$ 的级, 则 $d = \sum\limits_{i=1}^{m} \mu_i = \sum\limits_{j=1}^{n} \nu_j$. 分别计算 $f$ 在 $V, V_i, W_j$ 内的临界点个数, 则有

$$d - 1 \geqslant \sum_{i=1}^{m} (\mu_i - 1) + \sum_{j=1}^{n} (\nu_j - 1) = 2d - m - n,$$

即 $m + n \geqslant d + 1$, 因此 $V_i$, $W_j$ 中至少有两个不含临界点, 即为所求. □

**引理 8.3.3**　设 $0 < \delta < \varepsilon/2$, $U \subset \Delta(a, \delta)$ 单连通, $f: U \to \Delta(a, \varepsilon)$ 为全纯双射, 则 $f$ 在 $U$ 中有不动点 $\zeta$, 满足 $|f'(\zeta)| \geqslant \varepsilon/4\delta$.

**证明**　考虑 $f$ 的反函数 $g$, 显然 $g$ 有一个不动点 $\zeta \in \Delta(a, \delta)$. 令

$$h(z) = \frac{1}{2\delta}\left(g\left(\frac{\varepsilon}{2}z + \zeta\right) - \zeta\right),$$

则 $h$ 将 $\Delta$ 映到 $\Delta$ 的内部, 并且 $h(0)=0$. 因此

$$1 \geqslant |h'(0)| = \frac{\varepsilon|g'(\zeta)|}{4\delta},$$

即有

$$|f'(\zeta)| = \left|\frac{1}{g'(\zeta)}\right| \geqslant \frac{\varepsilon}{4\delta}. \qquad \square$$

**引理 8.3.4**[7] *令 $q,n \in N$, $q \geqslant 6$, $n \geqslant 2$, $G$ 是一个图, 有 $q$ 个顶点, 每个顶点输出数至少为 $q-2$, 则 $G$ 包含一个长度为 $n$ 的原始回路.*

**引理 8.3.5**[65] *$f$ 是次数超过 2 的多项式, $n \geqslant 2$, 则 $f^n$ 有一个斥性周期点.*

**定理 8.3.1 的证明** 先设 $\mathcal{F}$ 在六个点不正规, 记为 $a_1,\cdots,a_6$, 取 $\varepsilon < \min\limits_{i\neq j}|a_i - a_j|$, $\delta < \varepsilon/4K$, 选取 $\mathcal{F}$ 在此六点都不正规的子列 $\{f_k\}$, 对于固定的 $k$, 考虑图 $G=(V,E)$, 其中 $G$ 的顶点由 $a_1,\cdots,a_6$ 构成, 边为 $(a_i,a_j)$, 满足 $f_k$ 在 $D(a_i,\delta)$ 上有一个单叶岛 $D(a_j,\varepsilon)$. 由引理 8.3.1, 每个顶点的输出数至少为 4, 于是可由引理 8.3.4, 对于任意的 $n \geqslant 2$, $G$ 包含一个长度为 $n$ 的原始回路 $(a_{i_0},a_{i_1},\cdots,a_{i_n})$, 因此在 $\Delta(a_{i_{n-1}},\delta)$ 内包含一个 $\Delta(a_{i_n},\delta)$ 上的单叶岛 $U_{n-1}$, 在 $D(a_{i_{n-2}},\delta)$ 内包含一个 $U_{n-1}$ 上的单叶岛 $U_{n-2}$, $\cdots$, 这样有 $U_0 \subset \Delta(a_{i_0},\delta) = D(a_{i_n},\delta)$ 为 $\Delta(a_{i_n},\varepsilon)$ 上的单叶岛, 由引理 8.3.3, $f_k^n$ 有一个不动点 $\zeta \in U_0$, $|(f_k^n)'(\zeta)| \geqslant \varepsilon/4\delta > K$, 由原始回路的性质知道, $\zeta$ 只能为 $f_k$ 的 $n$ 阶周期点.

因此 $\mathcal{F}$ 为阶数 $q \leqslant 5$ 的拟正规族, 如果 $q \geqslant 2$, 那么可设 $a_1,\cdots,a_q$ 为不正规点, 取 $\varepsilon$, $\delta$ 及子列如前. 令 $R > \max\limits_j |a_j| + \varepsilon$, 则当 $k$ 足够大时, 在 $|z-a_j| = \delta$ 上有 $|f_k(z)| > R$, $j=1,2,\cdots,q$. 又由于 $\mathcal{F}$ 在点 $a_j$ 处不正规, 存在 $z \in D(a_j,\delta)$, 使得 $|f_k(z)| < R$. 因此 $f_k^{-1}(D(0,R))$ 在每个 $D(a_j,\delta)$ 内有一个连通分支 $U_j$, $(f_k|_{U_j},U_j,D(0,R))$ 是一个类多项式映射, 由引理 8.3.2, 在 $U_1$, $U_2$ 上各存在两个 $\Delta(a_1,\varepsilon)$ 或 $\Delta(a_2,\varepsilon)$ 上的单叶岛, 不妨设 $V_1$, $W_1$ 是其中两个 $\Delta(a_1,\varepsilon)$ 上的单叶岛, 由引理 8.3.2, 可以找到 $V_2$, $W_2 \subset U_2$ 是 $V_1,W_1$ 上的单叶岛, 重复以上步骤, 可以找到 $V_{n-1},W_{n-1} \subset U_2$ 是 $V_{n-2}$, $W_{n-2}$ 上的单叶岛, 又取 $V_n$, $W_n \subset U_1$ 是 $V_{n-1},W_{n-1}$ 上的单叶岛, 因此 $f^n$ 将 $V_n$ 双射至 $\Delta(a_1,\varepsilon)$, 由引理 8.3.3, $f^n$ 有一个不动点 $\zeta \in V_n$, $|(f^n)'(\zeta)| > K$, 又 $f^j(\zeta) \in U_2$, 因此当 $n \geqslant 3$ 时 $\zeta$ 即为所需的 $n$ 阶周期点.

当 $n=2$ 时, 若 $V_1$, $W_1 \subset U_2$, 则结论依旧成立, 若 $V_1$, $W_1 \subset U_1$, 由 $V_1$ 是 $\Delta(a_1,\varepsilon)$ 上的单叶岛, 而 $W_1 \subset U_1 \subset D(a_1,\varepsilon)$, 故 $V_1$ 包含一个 $W_1$ 上的单叶岛 $X$, 因此 $f^2$ 将 $X$ 双射至 $W_1$, 再次使用引理 8.3.3 可得结论. 若 $V_1 \subset U_1$, $W_1 \subset U_2$, 则 $U_1 \cup U_2$ 包含两个 $D(a_2,\varepsilon)$ 上的单叶岛, $X_1 \subset U_1$, $Y_1 \subset U_2$, 则这时可在 $X_1$ 中取到一个 $W_1$ 上的单叶岛, 重复以上步骤即可得到结论. $\square$

**定理 8.3.2 的证明**　取 $c_k \to \infty$, $f(c_k)$ 有界, 令 $f_k(z) = f(c_k z)/c_k$, 则 $f_k(0) \to 0$, $f_k(1) \to 0$.

假设结论不成立, 则存在 $K > 1$, 对 $f$ 的所有 $n$ 阶周期点 $\zeta$, $|(f^n)'(\zeta)| \leqslant K$ 成立, 注意到若 $\zeta$ 是 $f_k$ 的 $n$ 阶周期点, 则 $c_k\zeta$ 是 $f$ 的 $n$ 阶周期点, 且 $|(f_k^n)'(\zeta)| = |(f^n)'(c_k\zeta)|$, 因此 $\{f_k\}$ 一阶拟正规, 由 $\{f_k\}$ 在 0, 1 有界, 由最大模原理, $\{f_k\}$ 正规. 另一方面, 当 $r$ 足够大时有

$$M\left(\frac{1}{\sqrt{c_k}}, f_k\right) = \frac{M(\sqrt{c_k}, f)}{|c_k|} \geqslant 1.$$

因此 $f_k$ 在 0 不正规, 矛盾. □

**定理 8.3.3 的证明**　当 $f^n(\zeta) = \zeta$ 时记所有 $D$ 上满足 $|(f^n)'(\zeta)| \leqslant K$ 的全纯函数为 $\mathcal{F}(D,n,K)$. 不妨设 $D$ 为单位圆盘 $\Delta$, 设不存在 $K > 1$, $\mathcal{F}(\Delta,n,K)$ 正规. 则对 $m \in N$, 取 $\mathcal{F}\left(\Delta,n,1+\dfrac{1}{m}\right)$ 内不正规子列 $\{f_{m_j}\}$. 令 $g_{m_j}(z) = f_{m_j}(z) - z$, 则 $g_{m_j}(z)$ 零点处有 $|g'_{m_j}(z)| \leqslant |f_{m_j}(z)| + 1 \leqslant \sqrt[n]{1+\dfrac{1}{m}} + 1 \leqslant 3$. 由 $\{g_{m_j}\}$ 不正规, 存在 $z_j \in \Delta$, $\rho_j > 0$, 子列仍记为 $\{g_{m_j}\}$, 满足

$$\frac{g_{m_j}(z_j + \rho_j z)}{\rho_j} \to G_m(z),$$

且有 $G_m^{\#}(z) \leqslant G_m^{\#}(0) = 4$, 令 $L_j(z) = z_j + \rho_j z$, 则

$$h_{m_j}(z) = L_j^{-1}(f_{m_j}(L_j(z))) \to G_m(z) + z = F_m(z).$$

又 $f_{m_j} \in \mathcal{F}\left(\Delta,n,1+\dfrac{1}{m}\right)$, 因此 $h_{m_j} \in \mathcal{F}\left(L_j^{-1}\Delta,n,1+\dfrac{1}{m}\right)$, $F_m \in \mathcal{F}\left(C,n,1+\dfrac{1}{m}\right)$. 由 $G_m^{\#}(z) \leqslant G_m^{\#}(0) = 4$ 可知 $\{G_m\}$ 正规, 即 $\{F_m\}$ 正规, 记其极限函数为 $F$, 则有 $F \in \mathcal{F}(C,n,1)$, 即 $F^n$ 没有斥性周期点, 由定理 8.3.2, $F$ 为多项式, 再由引理 8.3.5, $F$ 的阶数至多为 1, 但 $|F'_m(0)| \geqslant |G'_m(0)| - 1 \geqslant G_m^{\#}(0) - 1 = 3$, 因此 $F(z) = az + b$, $|a| > 3$, 与 $F^n$ 没有斥性周期点矛盾. □

# 参 考 文 献


1 Ahlfors L.. Beiträge zur Theorie der Meromorphen Funktionen. C.R.$7^e$ Congr. Math. Scand. Oslo, 1929, 19: 84～88.

2 Ahlfors L., Conformal Invariants, New York McGraw Hill, 1973.

3 I. N. Baker. Repulsive fixpoints of entire functions. Math. Z., 1968, 104: 252～256.

4 Bank S., Kaufman. R.. On meromorphic solutions of first-order differential equations. Comment Math. Helv., 1976, 51(3): 289～299.

5 Bargmann D.. Simple proofs of some fundamental properties of the Julia set. Ergodic Theory Dyn. Syst., 1999, 19(3): 553～558.

6 Bargmann D.. Normal families of covering maps. J. Anal. Math., 2001, 85: 291～306.

7 Bargmann D., Bergweiler W.. Periodic points and normal families. Proc. Amer. Math. Soc, 2001, 129: 2881～2888.

8 Bargmann, Bonk, Hinkkanen and Martin. Families of meromorphic functions avoiding continuous functions. J. Analyse Math., 1999, 79: 379～387.

9 Barsegian G.. Estimates of derivatives of meromorphic functions on sets of a-points. J. London Math. Soc. 1986, 34(2): 534～540.

10 Barsegian G.. Geometrical theory of meromorphic functions. manuscript.

11 K. F. Barth, Rippon P. J.. Asymptotic values of strongly normal functions. Ark. Mat., 2005, 43(1): 69～84.

12 Beardon. A. F. Iteration of Rational Functions. New York: Springer, 1991.

13 Bergweiler W.. Proof of a conjecture of gross concerning fix-points. Math. Z., 1990, 204: 381～390.

14 Bergweiler W.. Periodic points of entire functions: proof of a conjecture of Baker. Complex Variables, 1991, 17: 57～72.

15 Bergweiler W.. On the existence of fixpoints of composite meromorphic functions. Proc. Amer. Math. Soc., 1992, 114: 879～880.

16 Bergweiler W.. Iteration of meromorphic functions. Bull. Amer. Math. Soc. (N. S.), 1993, 29: 151～188.

17 Bergweiler W.. On the composition of transcendental entire and meromorphic functions. Proc. Amer. Math. Soc., 1995, 123: 2151～2153.

18 Bergweiler W.. A new proof of the Ahlfors five islands theorem. J. Analyse Math., 1998, 76: 337～347.

19 Bergweiler W.. On a theorem of Gol'dberg concerning meromorphic solutions of algebraic differential equations. Complex Variables, 1998, 37(1-4): 93～96.

20 Bergweiler W.. Normality and exceptional values of derivatives. Proc. Amer. Math. Soc., 2001, 129(1): 121～129.

21 Bergweiler W.. Ahlfors theory and complex dynamics: periodic points of entire functions. in "Complex dynamics and related fields". RIMS Kokyuroku, 2002, 1269: 1～11.

22 Bergweiler W.. Quasinormal families and periodic points. in "Complex Analysis and Dynam-

ical Systems II"; (Nahariya, 2003), Contemp. Math.

23 Bergweiler W.. Fixed points of composite meromorphic functions and normal families. Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A, 2004, 134: 653～660.

24 Bergweiler W.. Quasinormal families and periodic points. Contemp. Math., 2005, 382: 55～63

25 Bergweiler W.. Bloch's principle. Comput. Methods Funct. Theory, 2006, 6(1): 77～108.

26 Bergweiler W., Eremenko A.. On the singularities of the inverse to a meromorphic function of finite order. Rev. Mat. Iberoamericana, 1995, 11: 355～373.

27 Bergweiler W., Langley J. K.. Nonvanishing derivatives and normal families. J. Anal. Math., 2003, 91: 353～367.

28 Bergweiler W., Langley J. K.. Multiplicities in Hayman's alternative. J. Austral Math. Soc., 2005,78: 37～57.

29 Bergweiler W., Pang X. C.. On the derivative of meromorphic functions with multiple zeros. J. Math. Anal. Appl., 2003, 278(2): 285～292.

30 Bhoosnurmath S S., Puranik A. G.. Generalised differential polynomial and normality criteria for a family of meromorphic functions. J. Anal., 2001, 9: 195～199.

31 Bhoosnurmath S S., Puranik A. G.. A generalised criterion for normal families. Ganita, 2002, 53(1): 97～102.

32 Bloch A.. Les theorem de M. Valiron sur les fonctions entires et la theoriede 1,uniformization. Ann. Fec. Sci. Touiouse, 1925, 17: 1～22.

33 Bolsch A.. Repulsive periodic points of meromorphic functions. Complex Variables, 1996, 31: 75～79.

34 Bureau F.. Mémoire sur les fonctions uniformes à point singuliar essentiel isolé, Mém. Soc. Roy. Sci. Liége, 1932, 17(3): 1932.

35 Carleson L., Gamelin T. W.. Complex Dynamics. New York, Springer, Berlin, Heidelberg, 1993.

36 Chang J. M.. Normality criteria and singular directions for meromorphic functions and families(Chinese). Acta Math. Sinica, 1996, 39(4): 540～542.

37 Chang J. M.. Radially distributed values of meromorphic functions. J. Math. Anal. Appl., 2006, 319(1): 34～47.

38 Chang J. M., Fang M. L.. Normal families and fixed points. J. Analyse Math., 2005, 95: 389～395.

39 Chang J. M., Fang M L.. Normality and shared functions of holomorphic functions and their derivatives. Michigan Math. J., 2005, 53(3): 625～645.

40 Chang J. M., Fang M. L.. On Entire functions that share a value with their derivatives. Ann.Acad. Fenn. Math., 2006, 31(2): 265～286.

41 Chang J. M., Fang M. L.. Normal families and uniqueness of entire functions and their derivatives. Acta Math. Sinica (English Series), to appear.

42 Chang J. M., Fang M. L., Zalcman L.. Normal families of holomorphic functions. Illinois Math. J., 2004, 48(1): 319～337.

43 Chang J. M., Fang M. L., Zalcman L.. Normality and fixed-points of meromorphic functions. Ark. Mat., 2005, 43(2): 307～321.

44 Chen H. H.. Yosida function and Picard values of integral functions and their derivatives. Bull. Austral. Math. Soc., 1996, 54: 373～381.

45 Chen H. H., Fang M. L.. On a Theorem of Drasin. Adv. in Math.(China), 1991, 22(4): 504.

46 Chen H. H., Fang M L.. On the value distribution of $f^n f'$. Sci. China Ser. A, 1995, 38: 789~798.

47 Chen H. H., Fang M, L.. Shared values and normal families of meromorphic functions. J. Math. Anal. Appl., 2001, 260(1): 124~132.

48 Chen H. H., Gu Y. X.. An improvement of Marty' s criterion and its applications. Sci. China, Ser. A, 1993, 36: 674~681.

49 Chen H. H., Hua X. H.. Normality criterion and singular directions. Proceedings of the Conference on Complex Analysis (Tianjin, 1992), 34~40, Conf. Proc. Lecture Notes Anal., I, Internat. Press, Cambridge, MA, 1994.

50 Chen H. H., Hua X. H.. Normal families of holomorphic functions. J. Austral. Math. Soc. Ser. A, 1995, 59(1): 112~117.

51 Chen H. H., Hua X. H.. Normal families concerning shared values. Israel J. Math., 2000, 115: 355~362.

52 Chen H. H., Lappan P.. Normal families, orders of zeros, and omitted values. Ann. Acad. Sci. Fenn. Math., 1996, 21(1): 89~100.

53 Chen H. H., Lappan P.. Spherical derivative, higher derivatives and normal families. Adv. in Math. (China), 1996, 25(6): 517~524.

54 Chen H. H., Lappan P.. Products of spherical derivatives and normal functions. J. Austral. Math. Soc. Ser. A, 1998, 64(2): 231~246.

55 Chen X. X.. Normal families of meromorphic functions and shared values. J. Math. Study, 2005, 38(2): 133~142.

56 Childs L.. A Concrete Introduction to Higher Algebra. Springer-Verlag, 1979.

57 Clifford E. F.. Normal families and value distribution in connection with composite functions. J. Math. Anal. Appl., 2005, 312(1): 195~204.

58 Clifford E. F.. Two new criteria for normal families. Comput. Methods Funct. Theory, 2005, 5(1): 65~76.

59 Clunie J.. On integral and meromorphic functions. J. London Math. Soc., 1962, 37: 17~27.

60 Clunie J. Hayman W. K.. The spherical derivative of integral and meromorphic functions. Comment Math.Helv., 1966, 40: 117~148.

61 Deng F. W.. Normal family of compositions of holomorphic functions and their high order derivatives. Acta Math. Sci. Ser. B Engl. Ed., 2003, 23(4): 544~548.

62 Drasin D.. Normal families and the Nevanlinna theory. Acta Math., 1969, 122: 231~163.

63 Eremenko, A.. Bloch radius, normal families and quasiregular mappings. Proc. Amer. Math. Soc., 2000, 128(2): 557~560.

64 Essén E., Wu S. J.. Fixpoints and a normal family of analytic functions. Complex Variables, 1998,37: 171~178.

65 Essén M., Wu S. J.. Repulsive fixpoints of analytic functions with application to complex dynamics. J. London Math. Soc., 2000, 62(2): 139~148.

66 Fang M. L.. Criteria for normality of a family of meromorphic functions. Acta math. Sinica, 1994, 37(1): 86~90

67 Fang M. L.. A note on sharing values and normality. J. Math. Study(China), 1996, 29(4): 29~32.

68 Fang M. L.. A note on a problem of Hayman. Analysis, 2000, 20(1): 45~49.

69 Fang M. L.. Picard values and normality criterion. Bull. Korean Math. Soc., 2001, 38(2): 379~387.

70 Fang M. L., Hong W.. Some results on normal family of meromorphic functions. Bull. Malays. Math. Sci. Soc., 2000, 23(2): 143~151.

71 Fang M. L., Xu Y.. Normal families of holomorphic functions and shared values. Israel J. Math. 2002, 129: 125~141.

72 Fang M. L., Yuan W. J.. On Rosenbloom's fixed-point theorem and related results. J. Austral. Math. Soc. (Series A), 2000, 68: 321~333.

73 Fang M. L., Yuan W. J.. On the normality for families of meromorphic functions. Indian J. Math., 2001, 43: 341~351.

74 Fang M. L., Zalcman L.. Normal families and shared values of meromorphic functions II. Comput. Methods Funct. Theory, 2001, 1(1): 289~299.

75 Fang M. L., Zalcman L.. Normal families and shared values of meromorphic functions III. Comput. Methods Funct. Theory, 2002, 2(2): 385~395.

76 Fang M. L., Zalcman L.. Normal families and shared values of meromorphic functions. Ann. Polon. Math., 2003, 80: 133~141.

77 Fang M. L., Zalcman L.. Normal families and uniqueness theorems for entire functions. J. Math. Anal. Appl., 2003, 280: 273~283.

78 Fang M. L., Zalcman L.. A note on normality and shared values. J. Aust. Math. Soc., 2004, 76: 141~150.

79 Frank G.. Eine Vermutung von Hayman über Nullstellen meromorpher Funktionen. Math. Z., 1976, 149: 29~36.

80 Frank G., Schwick W.. A counterexample to the generalized Bloch principle. N. Z. J. Math., 1994, 23(2): 121~123.

81 Frank G., Wang Y. F.. On the meromorphic solutions of algebraic differential equations. Analysis, 1998, 1(1): 49~54.

82 Frank G., Weissenborn G.. Rational deficient functions of meromorphic functions. Bull. London Math. Soc., 1986, 18: 29~33.

83 Gol'dberg A.. On one-valued integrals of differential equations of the first order. (Russian) Ukrain Mat. Zh, 1956, 8: 254~261.

84 Grahl J.. Some applications of Cartan's theorem to normality and semiduality of gap power series. J. Anal. Math., 2000, 82: 207~220.

85 Grahl J.. An extension of a normality result of D. Drasin and H. Chen & X. Hua for analytic functions. Comput. Methods Funct. Theory, 2001, 1(2): 457~478.

86 Grahl J.. Hayman's alternative and normal families of non-vanishing meromorphic functions. Comput. Methods Funct. Theory, 2002, 2(2): 481~501.

87 Gross F., Osgood C. F.. On the fixed points of composite meromorphic functions. J. Math. Anal. Appl., 1986, 114: 490~496.

88 Gu Y. X.. On normal families of meromorphic functions. Scientia Sinica, 1978, A(4): 373~384.

89 Gu Y. X.. A normal criterion of meromorphic families. Scientia Sinica, mathematical Issue (I), 1979, 267~274.

90 Gu Y. X.. On the singular direction of entire functions. Adv. in Math. (China), 1991, 20(2):

180～183.

91 Gu Y. X.. Normal Families of Meromorphic Functions(Chinese). Chengdu: Sichuan Education Press, 1991.

92 Gundersen G. G., Yang L. Z.. Entire functions that share one value with one or two of their derivatives. J. Math. Anal. Appl., 1998, 223: 88～95.

93 Guo H.. Fixpoints of Iterates and Quasinormal Families. Adv. in Math. (China), 2004, 33(3): 373～374.

94 Han R S., Gu Y. X.. A normal criterion concerning differentional polynomials. Adv. Math. (China), 2002, 31(3): 237～242.

95 Hayman W. K.. Picard values of meromorphic functions and their derivatives. Ann. Math., 1959, 70: 9～42.

96 Hayman W. K.. Mcromorphic Functions. Oxford: Clarendon Press , 1964.

97 Hayman W. K.. Multivalent Functions. Cambridge, 1958.

98 Hayman W. K.. Subharmonic Functions. Vol 2, London: Academic Press, 1989.

99 He Y Z., Xiao X. Z.. Algebroid Function and Ordinary Differential Equation. Beijing:Science Press, 1988.

100 Hinchliffe J. D.. Normality and fixpoints of analytic functions. Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect., 2003, A 133: 1335～1339.

101 Hinkkanen A.. Normal families and Ahlfor's five islands theorem. New Zealand J. Math., 1993, 22(2): 39～41.

102 Huang X. J.. Normality of meromorphic functions with multiple zeros and shared values. J. Math. Anal. Appl., 2003, 277(1): 190～198.

103 Huang X. J., Gu Y. X.. Normal families related to shared values. Acta Math. Sinica, English Series, 2002, 45(5): 925～928.

104 Huang X. J., Gu Y. X.. Normal families of meromorphic functions with multiple zeros and poles. J. Math. Anal. Appl., 2004, 295: 611～619.

105 Hua X. H.. A new Approach to Normal Criterio. Manuscripata Math., 1995, 86: 467～478.

106 Hua X. H., Sun J. W.. Normal families of logarithmic derivatives. Nanjing Daxue Xuebao Shuxue Bannian Kan, 1995, 12(2): 163～170.

107 Iversen F.. Récherches sur les fonctions inverses des fonctions méromorphes. Thése, Helsingfors, 1914.

108 Indrajit L., Sharma D. K.. Normal families of meromorphic functions. Math. Balkanica (N.S.), 1993,7(1): 73～81.

109 Indrajit L., Shyamali D.. Some normality criteria. J. Inequal. Pure Appl. Math., 2004, 5(2): Article 35, 9 pp.

110 Indrajit L., Shyamali D.. Differential polynomials and normality. Demonstratio Math., 2005, 38(3): 579～589.

111 Jank G., Mues E., Volkmann L.. Meromorphe Funktionen, die mit ihrer ersten und zweiten Ableitung einen endlichen Wert teilen. Complex Variables, 1986, 6: 51～71.

112 Kovacheva R. K., Lawrynowicz J.. An analogue of Montel's theorem for some classes of rational functions. Czechoslovak Math. J., 2002, 52(127): 483～498.

113 Langley J. K.. On normal families and a result of Drasin. Proc. Roy. Soc. Edin., 1984, 98 A: 385～393.

114 Langley J. K.. Proof of a conjecture of Hayman concerning $f$ and $f''$. J. London Math. Soc., 1993,48(2): 500~514.

115 Lappan P.. A uniform approach to normal families. Rev. Roumaine Math. Pures Appl., 1994, 39(7): 691~702.

116 Lappan P.. Normal families and normal functions: results and techniques. Function spaces and complex analysis, Joensuu 1997 (Ilomantsi), 63~78, Univ. Joensuu Dept. Math. Rep. Ser., 2, Univ. Joensuu, Joensuu, 1999.

117 Lappan P.. Avoidance criteria for normal families and normal functions. Progress in Analysis, Vol. I, II (Berlin, 2001), 221~228, World Sci. Publishing, River Edge, NJ, 2003.

118 Li B. Q.. A joint theorem generalizing the criteria of Montel and Miranda for normal families. Proc. Amer. Math. Soc., 2004, 132(9): 2639~2646.

119 Li J. T., Yi H. X.. Normal families and uniqueness of entire functions and their derivatives. Arch. Math. (Basel), 2006, 87(1): 52~59.

120 Li S. Y.. The normality criterion of a class of meromorphic functions. J, of Fujian Normal University, 1984, 2: 156~158.

121 Li X. J.. The proof of Hayman's conjecture on normal families. Sci. Sinica (Ser. A), 1985, 28: 596~603.

122 Li P., Yang C. C.. Uniqueness theorems on entire functions and their derivatives. J. Math. Anal. Appl., 2001, 253: 50~57.

123 Liao L. W., Su W. Y., Yang C. C.. A Malmquist-Yosida type of theorem for the second-order algebraic differential equations. J. Differ. Equations, 2003,187(1): 63~71.

124 Lin W. C.. Uniqueness theorem and normality criteria with sharing values(Chinese). Math. Theory Appl. (Changsha), 2001, 21(2): 10~16.

125 Lin W. C.. Shared values and normal families(Chinese). J. Math. (Wuhan), 2001, 21(4): 433~436

126 Lin W. C., Huang B.. A note on Hayman's problem and the sharing value(Chinese). Acta Math. Sci. Ser. A Chin. Ed., 2004, 24(4): 449~453.

127 Lin W. C., Yang L. Z.. Normality of a family of holomorphic functions which share one finite value with their derivatives(Chinese). Acta Math. Sinica, 2003, 46(3): 539~544.

128 Lin W. C., Yi H. X.. Normal families and one shared value . Int. J. Math. Sci., 2002, 1(1-2): 65~72.

129 Lin W. C., Yi H. X.. On a conjecture of W. Bergweiler. Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci., 2003, 79(2): 23~27.

130 Lin W. C., Yi H. X.. Normality and shared-value of derivatives. Complex Var. Theory Appl., 2003, 48(10): 857~863.

131 Lin W. C., Yi H. X.. Exceptional values of derivatives concerning shared value. New Zealand J. Math., 2003, 32(2): 173~181.

132 Lin W. C., Yi H. X.. On homogeneous differential polynomials of meromorphic functions. Acta Math. Sinica, English Series, 2005, 21(2): 261~266.

133 Liu X. K., Sun D. C.. A new normality criterion for algebroidal functions(Chinese). Acta Math. Sinica, 2004, 47(4): 731~734.

134 Liu X. J., Pang X. C., Shared values and normal function . Acta Math. Sinica, English Series, to appear.

135 Lorentzen L.. General convergence in quasi-normal families. Proc. Edinb. Math. Soc., 2003,46(2): 169~183.

136 Miranda C.. Sur un nouveau critére de normalité pour les familles de fonctions holomorphes. Bull. Soc. Math. France, 1935, 63: 185~196.

137 Mues E.. Über eine Vermutung von Hayman. Math. Z., 1972, 119:, 11~20.

138 Nevanlinna R.. Eindeutige Analytische Funktionen. Berlin, Göttingen, Heidelberg: Springer, 1953.

139 Nevo S.. Applications of Zalcman's lemma to $Q_m$-normal families. Analysis (Munich), 2001, 21(3): 289~325.

140 Nevo S.. On theorems of Yang and Schwick. Complex Variables Theory Appl., 2001, 46(4): 315~321.

141 Nevo S.. Normality properties of the family $\{f(nz)\colon n \in \mathbb{N}\}$. Comput. Methods Funct. Theory, 2001, 1(2): 375~386.

142 Nevo S.. Generating quasinormal families of arbitrary degree and order. Analysis (Munich), 2003, 23(2): 125~149.

143 Nevo S.. Transfinite extension to $Q_m$-normality theory. Result. Math., 2003, 44(1~2): 141~156.

144 Nevo S., Pang X. C.. Quasinormality of order 1 for families of meromorphic functions. Kodai Math. J., 2004, 27(2): 152~163.

145 Oshkin I.. A normal criterion of families of holomorphic functions(Russian). Usp. Mat. Nauk, 1982, 37(2): 221~222.

146 Pang X. C.. Normality conditions for differential polynomials(Chinese). Kexue Tongbao, 1988, 33(22): 1690~1693.

147 Pang X. C.. Bloch's principle and normal criterion. Sci. China, Ser. A, 1989, 32: 782~791.

148 Pang X. C.. On normal criterion of meromorphic functions. Sci. China, Ser. A, 1990, 33: 521~527.

149 Pang X. C.. A normal criterion and singular directions(Chinese). Chinese Ann. Math. Ser. A, 1991, 12: suppl., 115~119.

150 Pang X. C.. Normal families and normal functions of meromorphic functions. Chin. Ann. Math., Ser. A, 2000, 21(5): 601~604.

151 Pang X. C.. Shared values and normal families. Analysis, 2002, 22: 175~182.

152 Pang X. C., Nevo S., Zalcman L.. Quasinormal families of meromorphic functions. Rev. Mat. Iberoamericana, 2005, 21(1): 249~262.

153 Pang X. C., Nevo S., Zalcman L.. Quasinormal families of meromorphic functions. II. Selected topics in complex analysis, 177~189, Oper. Theory Adv. Appl., 158, Basel, 2005.

154 Pang X. C., Yang D. G., Zalcman L.. Noemal families of meromorphic functions whose derivatives omit a function. Comput. Methods Funct., 2002, 2: 257~265.

155 Pang X. C., Yang D G., Zalcman L.. Normal families and omitted functions. Indiana Univ. Math. J., 2005,54(1): 223~235.

156 Pang X. C., Zalcman L.. On theorems of Hayman and Clunie. N. Z. J. Math., 1999, 28(1): 71~75.

157 Pang X. C., Zalcman L.. Normal families and shared values. Bull. London Math. Soc., 2000, 32: 325~331.

158 Pang X. C., Zalcman L.. Normality and shared values. Ark. Mat., 2000, 38: 171∼182.
159 Pang X. C., Zalcman L.. Normal families of meromorphic functions with multiple zeros and poles. Israel J. Math., 2003, 136: 1∼9.
160 Ren F. Y.. Complex Dynamics of Analytic Functions. Shanghai: Press of Fudan University. 1997.
161 Rosenbloom P. C.. The fix-points of entire functions. Medd. Lunds. Univ. Mat. Sem., Tome Supplementaire, 1952, 114: 186∼192.
162 Rubel L.. Four countexamples to Bloch's principle. Proc. Amer. Math. Soc., 1986, 98: 257∼260.
163 Schiff J.. Normal Families. Springer-Verlag, 1993.
164 Schwick W.. Normality criteria for families of meromorphic functions. J. d'Analyse Math., 1989, 52: 241∼289.
165 Schwick W.. A new joint proof of the theorems of Picard and Montel. Results Math., 1992, 21:(3∼4): 403∼407.
166 Schwick W.. Sharing values and normality. Arch Math., 1992, 59: 50∼54.
167 Schwick W.. On a normality criterion of H. L. Royden. N. Z. J. Math., 1994, 23(1): 91∼92.
168 Schwick W.. Repelling periodic points in the Julia set. Bull. of London Math. Soc., 1997, 29:, 314∼316.
169 Schwick W.. Exceptional functions and normality . Bull. of London Math. Soc., 1997, 29: 425∼432.
170 Schwick W.. On Hayman's alternative for families of meromorphic functions. Complex Variables, 1997, 32: 51∼57.
171 Schwick W.. A note on Zalcman's lemma. N. Z. J. Math., 2000, 29(1): 71∼72.
172 Shimizu T.. On the theory of meromorphic functions. Jap.J.of Math., 1929, 6: 119∼171.
173 Singh A. P., Singh A.. Sharing values and normality of meromorphic functions. Complex Var. Theory Appl., 2004, 49(6): 417∼425.
174 Steinmetz N.. Zalcman functions and rational dynamics. New Zealand J. Math., 2003, 32(1): 91∼104.
175 Sun D. C.. The shared value criterion for normality. J. Wuhan Univ. Natur. Sci. Ed., 1994, 3: 9∼12.
176 Sun D. C.. A necessary and sufficient condition for normality(Chinese). Acta Math. Sci. (Chinese), 1994, 14(3): 304∼307.
177 Sun D C.. Normality theorems for meromorphic functions(Chinese). J. Wuhan Univ. Natur. Sci. Ed., 1995, 41(1): 1∼7.
178 Sun D. C.. A normal theorem for algebroidal functions (Chinese). J. Math. (Wuhan), 2000,20(4): 361∼364.
179 Sun D. C., Yang L.. Normal family of algebroidal functions. Sci. China Ser. A, 2001, 44(10): 1271∼1277.
180 Sun D, C., Yang L.. Normal family of quasimeromorphic mappings. Sci. China Ser. A, 2003, 46(4): 440∼449.
181 Tsuji M.. Potential Theory in Modern Function Theory. Maruzen Co. Ltd., Tokyo, 1959.
182 Wang J. P.. On the conjecture for zeros of the entire function $f^{(k)}f-a$(Chinese). Adv. Math. (China), 2002, 31(1): 41∼46.

183 Wang J. P.. Normality criteria for families of holomorphic functions. Northeast. Math. J., 2003, 19(3): 267~272.

184 Wang P. L.. Sharing values and normality. Nanjing Daxue Xuebao Shuxue Bannian Kan, 2005, 22(1): 115~122.

185 Wang S. G.. Weakly repulsive fixed points of meromorphic functions and quasinormal families(Chinese). J. Math. Res. Exposition, 2003, 23(4): 673~678.

186 Wang S. G., Wu S. J.. Fixpoints of meromorphic functions and quasinormal families. Acta Math. Sinica, 2002, 45: 545~550.

187 Wang Y. F.. On the Problems of Meromorphic Derivatives. Proceeding of conference on complex analysis(Tianjin, China), 1992, 225~234.

188 Wang Y. F.. Normality and Julia sets. Finite or infinite dimensional complex analysis (Fukuoka, 1999), 583~589, Lecture Notes in Pure and Appl. Math., 214, Dekker, New York, 2000.

189 Wang Y. F., Fang M. L.. Picard values and normal families of meromorphic functions with multiple zeros. Acta Math. Sinica (N.S.), 1998. 14(1): 17~26.

190 Xu Y.. Sharing values and normality criteria. Nanjing Daxue Xuebao Shuxue Bannian Kan, 1998, 15(2): 180~185.

191 Xu Y.. Sharing values and normality criteria (Chinese). Acta Math. Sinica, 1999, 42(5): 833~838.

192 Xu Y.. Normal families of meromorphic functions. J. Math. (Wuhan), 2001, 21(4): 381~386.

193 Xu Y.. Normal functions and normal families. Bull. Malays. Math. Sci. Soc., 2004, 27(2): 149~160.

194 Xu Y.. Normality and exceptional functions of derivatives. J. Aust. Soc., 2004, 76: 403~413.

195 Xu Y.. Share fix-points and normal families of holomorphic functions. Arch. Math. (Basel), 2005, 84(6): 512~518.

196 Xu Y.. On Montel's theorem and Yang's problem. J. Math. Anal. Appl., 2005, 305(2): 743~751.

197 Xu Y.. Picard values and derivatives of meromorphic functions. Kodai Math. J., 2005, 28(1): 99~105.

198 Xu Y.. On the value distribution of derivatives of meromorphic functions. Appl. Math. Lett., 2005, 18(5): 597~602

199 Xu Y., Fang M. L.. On normal families of meromorphic functions. J. Aust. Math. Soc., 2003, 74(2): 155~164.

200 Xu Y., Fang M. L.. A note on some results of Schwick. Bull. Malays. Math. Sci., Soc. 2004, 27(2): 1~8.

201 Xu Y., Hua X. H.. Normality criteria of families of meromorphic functions. Indian J. Pure Appl. Math., 2000, 31(1): 61~68.

202 Xu W. S.. Differential polynomials and normal families. Acta Math. Sinica (N.S.), 1994, 10(2): 215~218.

203 Xue G., Pang X. C.. A criterion for normality of a family of meromorphic functions. J. East China Norm. Univ. Natur. Sci. Ed., 1998, 2:, 15~22.

204 Yang C. C., Yi H, X.. Uniqueness Theory of Meromorphic Functions. Beijing: Science Press, 1995 [In Chinese]; Kluwer Academic Publishers, The Netherlands, 2003.

205 Yang, L.. Normal families and fix-points of meromorphic functions. Indiana Univ. Math. J., 1986, 35(1): 179~191.

206 Yang L.. Normality of families of meromorphic functions. Scientia Sinica, 1986,A(9): 898~908.

207 Yang L.. Value Distribution Theory. Berlin: Springer-Verlag, 1993.

208 Yang L.. Proc. Symposium on Value Distribution Theory in Several Complex Variables. Univ. of Notre Dame Press, 1992, 157~171.

209 Yang L.. Several results and problems in the theory of value distribution. Proceedings of the International Conference on Functional Analysis and Global Analysis (Quezon City, 1992); Southeast Asian Bull. Math. 1993, Special Issue, 175~183.

210 Yang L., Zhang G. H.. Recherches sur la normalité des familles de fonctions analytiques à des valeurs multiples, I. Un nouveau critère et quelques applications.Sci. Sinica, 1965, 14: 1258~1271; II . Géneralisations, Ibid. 1966,15: 433~453.

211 Yang L. Z.. Further results on entire functions that share one value with their derivatives. J. Math. Anal. Appl., 1997, 212: 529~536.

212 Ye Y. S.. A new normal criterion and its application. Chin. Ann. Math. Ser. A (Supplement), 1991, 12: 44~49.

213 Ye Y. S. A new normal criterion and its application. Chin. Ann. Math. Ser. B, 1994, 15(1): 75~80.

214 Ye Y. S., Pang X. C.. On the zeros of a differential polynomial and normal families. J. Math. Anal. Appl., 1997, 205(1): 32~42.

215 Ye Y. S., Pang X. C.. On shared values of meromorphic functions, preprint.

216 Zalcman L.. A heuristic principle in complex function theory. Amer. Math. Monthly, 1975, 82: 813~817.

217 Zalcman L.. On some questions of Hayman. unpublished manuscript,5pp., 1994.

218 Zalcman L.. Normal families: New perspectives. Bull. Amer. Math. Soc., 1998, 35: 215~230.

219 Zhang G. M.. Sun W., Pang X. C., On the normality of certain kind of holomorphic functions(Chinese). Chin. Ann. Math. Ser. A, 2005, 26(6): 765~770.

220 Zhang Q. C.. On normality of families of meromorphic functions(Chinese). J. Math. (Wuhan), 1989, 9(3): 261~262.

221 Zhang Q. C.. Normality criteria for holomorphic function families concerning shared values(Chinese). Appl. Math. J. Chinese Univ. Ser. A, 2004, 19(1): 18~22.

222 Zhang W. H.. Shared values and normality(Chinese). J. Math. Res. Exposition, 2005, 25(2): 307~310.

223 Zhang W. H.. Some results on normal families and a uniqueness theorem. New Zealand J. Math., 2005, 34(1): 97~101.

224 Zhang W. H.. Normal families and uniqueness related to shared values. J. Math. Res. Exposition, 2005, 25(1): 31~36.

225 Zheng J. H., Han Y. R.. Normal families of holomorphic functions and their compositions(Chinese). J. Tsinghua Univ., 1996, 36(2): 50~52.

226 Zheng J. H.. On the non-existence of unbounded domains of normality of meromorphic functions. J. Math. Anal. Appl., 2001, 264(2): 479~494.

# 《现代数学基础丛书》已出版书目

## (按出版时间排序)

1 数理逻辑基础(上册) 1981.1 胡世华、陆钟万 著
2 紧黎曼曲面引论 1981.3 伍鸿熙、吕以辇、陈志华 著
3 组合论(上册) 1981.10 柯召、魏万迪 著
4 数理统计引论 1981.11 陈希孺 著
5 多元统计分析引论 1982.6 张尧庭、方开泰 著
6 概率论基础 1982.8 严士健、王隽骧、刘秀芳 著
7 数理逻辑基础(下册) 1982.8 胡世华、陆钟万 著
8 群构造(上册) 1982.11 张远达 著
9 有限群构造(下册) 1982.12 张远达 著
10 环与代数 1983.3 刘绍学 著
11 测度论基础 1983.9 朱成熹 著
12 分析概率论 1984.4 胡迪鹤 著
13 巴拿赫空间引论 1984.8 定光桂 著
14 微分方程定性理论 1985.5 张芷芬、丁同仁、黄文灶、董镇喜 著
15 傅里叶积分算子理论及其应用 1985.9 仇庆久等 编
16 辛几何引论 1986.3 J.柯歇尔、邹异明 著
17 概率论基础和随机过程 1986.6 王寿仁 著
18 算子代数 1986.6 李炳仁 著
19 线性偏微分算子引论(上册) 1986.8 齐民友 著
20 实用微分几何引论 1986.11 苏步青等 著
21 微分动力系统原理 1987.2 张筑生 著
22 线性代数群表示导论(上册) 1987.2 曹锡华等 著
23 模型论基础 1987.8 王世强 著
24 递归论 1987.11 莫绍揆 著
25 有限群导引(上册) 1987.12 徐明曜 著
26 组合论(下册) 1987.12 柯召、魏万迪 著
27 拟共形映射及其在黎曼曲面论中的应用 1988.1 李忠 著
28 代数体函数与常微分方程 1988.2 何育赞 著

29　同调代数　1988.2　周伯壎　著
30　近代调和分析方法及其应用　1988.6　韩永生　著
31　带有时滞的动力系统的稳定性　1989.10　秦元勋等　编著
32　代数拓扑与示性类　1989.11　马德森著　吴英青、段海鲍译
33　非线性发展方程　1989.12　李大潜、陈韵梅　著
34　反应扩散方程引论　1990.2　叶其孝等　著
35　仿微分算子引论　1990.2　陈恕行等　编
36　公理集合论导引　1991.1　张锦文　著
37　解析数论基础　1991.2　潘承洞等　著
38　拓扑群引论　1991.3　黎景辉、冯绪宁　著
39　二阶椭圆型方程与椭圆型方程组　1991.4　陈亚浙、吴兰成　著
40　黎曼曲面　1991.4　吕以辇、张学莲　著
41　线性偏微分算子引论（下册）　1992.1　齐民友　著
42　复变函数逼近论　1992.3　沈燮昌　著
43　Banach 代数　1992.11　李炳仁　著
44　随机点过程及其应用　1992.12　邓永录等　著
45　丢番图逼近引论　1993.4　朱尧辰等　著
46　线性微分方程的非线性扰动　1994.2　徐登洲、马如云　著
47　广义哈密顿系统理论及其应用　1994.12　李继彬、赵晓华、刘正荣　著
48　线性整数规划的数学基础　1995.2　马仲蕃　著
49　单复变函数论中的几个论题　1995.8　庄圻泰　著
50　复解析动力系统　1995.10　吕以辇　著
51　组合矩阵论　1996.3　柳柏濂　著
52　Banach 空间中的非线性逼近理论　1997.5　徐士英、李冲、杨文善　著
53　有限典型群子空间轨道生成的格　1997.6　万哲先、霍元极　著
54　实分析导论　1998.2　丁传松等　著
55　对称性分岔理论基础　1998.3　唐云　著
56　Gel'fond-Baker 方法在丢番图方程中的应用　1998.10　乐茂华　著
57　半群的 S-系理论　1999.2　刘仲奎　著
58　有限群导引(下册)　1999.5　徐明曜等　著
59　随机模型的密度演化方法　1999.6　史定华　著
60　非线性偏微分复方程　1999.6　闻国椿　著
61　复合算子理论　1999.8　徐宪民　著
62　离散鞅及其应用　1999.9　史及民　编著

63 调和分析及其在偏微分方程中的应用 1999.10 苗长兴 著
64 惯性流形与近似惯性流形 2000.1 戴正德、郭柏灵 著
65 数学规划导论 2000.6 徐增堃 著
66 拓扑空间中的反例 2000.6 汪林、杨富春 编著
67 拓扑空间论 2000.7 高国士 著
68 非经典数理逻辑与近似推理 2000.9 王国俊 著
69 序半群引论 2001.1 谢祥云 著
70 动力系统的定性与分支理论 2001.2 罗定军、张祥、董梅芳 编著
71 随机分析学基础（第二版） 2001.3 黄志远 著
72 非线性动力系统分析引论 2001.9 盛昭瀚、马军海 著
73 高斯过程的样本轨道性质 2001.11 林正炎、陆传荣、张立新 著
74 数组合地图论 2001.11 刘彦佩 著
75 光滑映射的奇点理论 2002.1 李养成 著
76 动力系统的周期解与分支理论 2002.4 韩茂安 著
77 神经动力学模型方法和应用 2002.4 阮炯、顾凡及、蔡志杰 编著
78 同调论——代数拓扑之一 2002.7 沈信耀 著
79 金兹堡-朗道方程 2002.8 郭柏灵等 著
80 排队论基础 2002.10 孙荣恒、李建平 著
81 算子代数上线性映射引论 2002.12 侯晋川、崔建莲 著
82 微分方法中的变分方法 2003.2 陆文端 著
83 周期小波及其应用 2003.3 彭思龙、李登峰、谌秋辉 著
84 集值分析 2003.8 李雷、吴从炘 著
85 数理逻辑引论与归结原理 2003.8 王国俊 著
86 强偏差定理与分析方法 2003.8 刘文 著
87 椭圆与抛物型方程引论 2003.9 伍卓群、尹景学、王春朋 著
88 有限典型群子空间轨道生成的格（第二版） 2003.10 万哲先、霍元极 著
89 调和分析及其在偏微分方程中的应用（第二版） 2004.3 苗长兴 著
90 稳定性和单纯性理论 2004.6 史念东 著
91 发展方程数值计算方法 2004.6 黄明游 编著
92 传染病动力学的数学建模与研究 2004.8 马知恩、周义仓、王稳地、靳 祯 著
93 模李超代数 2004.9 张永正、刘文德 著
94 巴拿赫空间中算子广义逆理论及其应用 2005.1 王玉文 著
95 巴拿赫空间结构和算子理想 2005.3 钟怀杰 著
96 脉冲微分系统引论 2005.3 傅希林、闫宝强、刘衍胜 著

97 代数学中的Frobenius结构 2005.7 汪明义 著
98 生存数据统计分析 2005.12 王启华 著
99 数理逻辑引论与归结原理(第二版) 2006.3 王国俊 著
100 数据包络分析 2006.3 魏权龄 著
101 代数群引论 2006.9 黎景辉 陈志杰 赵春来 著
102 矩阵结合方案 2006.9 王仰贤 霍元极 麻常利 著
103 椭圆曲线公钥密码导引 2006.10 祝跃飞 张亚娟 著
104 凝固过程动力学与交界面稳定性引论 2006.12 徐鉴君 著
105 椭圆与超椭圆曲线公钥密码的理论与实现 2006.12 王学理 裴定一 著
106 非线性演化方程的稳定性与分歧 2007.4 马天 汪宁宏 著
107 正规族理论及其应用 2007.4 顾永兴 庞学诚 方明亮 著

[General Information]
书名=正规族理论及其应用
作者=顾永兴　庞学诚　方明亮著
页数=168
SS号=11856909
DX号=
出版日期=2007年04月第1版
出版社=科学出版社